

Vers une théorie unifiée des mésons et des baryons

(Towards a unified theory of mesons and baryons)

Dimitri Kalafatis

Theoretical Physics Group

Department of Physics and Astronomy

The University of Manchester

Manchester M13 9PL

UNITED KINGDOM

28 juin 1994

Abstract

This review article is devoted to recent advances in the theoretical description of nucleons as solitons of meson theories. Mesons are the elementary fields of a highly nonlinear effective lagrangian of QCD and baryons emerge as their topological soliton excitations. In chapter I we construct an effective lagrangian with the low mass mesons (π, ρ, A_1 and the scalar meson ϵ) generalising the Skyrme model. The vector meson fields are introduced as massive gauge fields in the linear sigma model. The parameters of the model are determined by fitting to low energy meson observables. We then look for topological soliton solutions of the model and investigate the nucleon-nucleon interaction in the product approximation. The results show that the scalar degrees of freedom give rise to attractive intermediate range NN forces. This is in sharp contrast to models incorporating vector degrees of freedom where only repulsive forces are found.

In chapter II we evaluate the leading correction to the classical Skyrme mass, that is, the Casimir energy. The main ultraviolet divergence is cancelled by well known chiral counterterms. We show that the result is controlled by the low energy behaviour of the phase shifts which are large and positive due to the presence of two normalisable zero modes. As a consequence, the correction is found to be negative and rather large, of the order of 1 GeV for the original Skyrme model. We then show that the situation improves if one introduces higher chiral orders in the effective lagrangian.

The problem of the stability of topological solitons when vector fields enter the chiral lagrangian is the subject of chapter III. Isospin one vector mesons are usually described as massive Yang-Mills particles in the chiral lagrangian. We investigate here some aspects of an alternative approach. It is found that within the theory we propose for the $\pi\rho$ system, the soliton is stable in very much the same way as with the ω -meson and that peculiar classical doublet solutions are ruled out. The formulation in terms of antisymmetric tensors is shown to be canonically related to a special case of our vector field description.

Introduction

La Physique des Constituants Élémentaires de la Matière est le domaine dans lequel la Théorie Quantique des Champs trouve ses applications naturelles. Les progrès effectués dans la description du spectre des particules observées dans la Nature, doivent beaucoup au principe de l'existence d'un Lagrangien fondamental. Ces Lagrangiens sont habituellement formulés en termes de multiplets de fermions élémentaires interagissant par l'intermédiaire des bosons de jauge associés à des invariances découlant de symétries internes. D'autre part il est bien connu que les interactions fondamentales obéissent à une hiérarchie compliquée, bâtie sur l'intensité du couplage entre les champs de particules. Pour les interactions électromagnétiques et faibles il est naturel de décrire les interactions dans le cadre de la théorie des perturbations. Celle-ci ne constitue une bonne approximation à la solution exacte que si la constante de couplage est faible, ce qui est le cas des interactions électrofaibles.

Cependant la théorie des perturbations n'est pas d'une grande utilité pour les interactions fortes, responsables de la cohésion de la matière. Dans la théorie des interactions fortes, le Lagrangien "fondamental" sur lequel beaucoup d'espoirs sont fondés, est celui de la chromodynamique quantique (QCD). Les champs fondamentaux de cette théorie sont des multiplets "colorés" de fermions (quarks) dont les interactions sont assurées par des champs de Yang-Mills de masse nulle (gluons). Une propriété essentielle que la QCD assigne aux interactions fortes, la liberté asymptotique, fait que les phénomènes aux courtes distances peuvent être décrits par la théorie des perturbations. Pour la description des propriétés à basse énergie des hadrons (dont la taille est de l'ordre du fermi), tout schéma perturbatif est complètement illusoire, car pour ces distances, la constante de couplage des interactions fortes est très grande. Le fait que les quarks sont confinés [1] à l'intérieur des hadrons n'est qu'une illustration du caractère non-perturbatif des interactions fortes. Comme il n'existe

pas à l'heure actuelle de méthode non-perturbative fiable et suffisamment simple, applicable au cas de la QCD, force est de construire, pour la description des spectres des hadrons, des modèles où les quarks sont confinés par un mécanisme plus ou moins “ad-hoc” comme les modèles de quarks non-relativistes, de cordes, de sacs, diélectriques etc... Ces modèles sont assez arbitraires car chacun d'eux simule le confinement, alors que le mécanisme de ce dernier reste inconnu.

Dans cet article nous adoptons une autre approche pour la description du monde hadronique. Puisque les quarks et les gluons sont confinés à l'intérieur des hadrons il est, peut être, plus approprié d'éliminer ces degrés de liberté et d'incorporer leurs effets dans une théorie effective des particules observées (les mésons et les baryons). Ce point de vue est étayé par une conjecture de Witten [2], selon laquelle à basse énergie et à la limite où le nombre de couleurs N_c devient grand, QCD est équivalente à une théorie effective de mésons interagissant faiblement. Les baryons émergent de cette théorie comme des solitons. Cette idée est attrayante car elle offre la possibilité de décrire les mésons et les baryons dans le cadre d'une seule théorie. En fait, un exemple d'une telle théorie avait été proposé par Skyrme [3] il y a trente ans, bien avant l'avènement de la QCD. Skyrme a construit une théorie où le champ fondamental est le pion et où les baryons sont les solutions de type soliton topologique. Curieusement ses travaux n'ont pas été remarqués en leur temps et ils n'ont été remis en vogue que récemment.

L'idéal serait de dériver à partir de la QCD une théorie effective de mésons. L'impossibilité d'effectuer une telle dérivation à l'heure actuelle laisse une certaine liberté pour le choix de la forme spécifique du Lagrangien effectif de la QCD. Certes, ce dernier doit traduire les propriétés essentielles de la QCD, comme la brisure spontanée de la symétrie chirale etc..., mais ceci est encore très général. Une possibilité est de se laisser guider par la phénoménologie bien connue des mésons afin de réduire le degré d'arbitraire dans le choix

du Lagrangien effectif, en respectant toujours les symétries essentielles des interactions fortes.

L'objet de l'étude présentée dans cet article est d'examiner à quel point une théorie effective de mésons a des chances réelles de fournir en même temps une description quantitative et physiquement cohérente des observables baryoniques via le concept des solitons topologiques.

Ce concept est basé sur l'existence d'un type de solutions pour des équations classiques non-linéaires, localisées dans l'espace. La différence entre ces solutions et les paquets d'onde usuels de la mécanique quantique est que les solitons, contrairement aux paquets d'onde, gardent leur énergie dans une région finie de l'espace. Cette région ne s'étale pas au cours du temps et elle évolue comme un objet en entier, le soliton. Ces solutions ont été trouvées dès le siècle dernier [4]-[5][†]. Quelques unes d'entre elles possèdent la propriété remarquable d'être obtenues par une superposition algébrique de solutions linéaires [7]. Un exemple d'équation de ce type qui a été utilisée pour la description de particules étendues en $1 + 1$ dimensions, est l'équation de Sine-Gordon [8]. Ses solutions ont des propriétés topologiques non-triviales qui résultent des conditions aux limites dans l'espace. Il apparaît alors une charge conservée que l'on peut identifier au nombre baryonique. La conservation de cette charge repose sur la topologie de la solution et caractérise le soliton [9].

Alors que les particules des théories quantiques usuelles sont les quanta élémentaires du champ, les solitons préservent leur caractère de particules même à la limite classique $\hbar \rightarrow 0$. La quantification naturelle de ces solutions peut s'appuyer sur des méthodes semiclassiques [10]-[11]. De plus il a été montré que dans certains cas la fonction d'onde du soliton d'une théorie de champs de bosons, peut avoir un comportement fermionique [12]. Cet aspect remarquable, montre qu'il n'est pas déraisonnable d'espérer décrire un spectre fermionique (les baryons) à partir d'un Lagrangien fondamental de bosons (les mésons).

[†] Le nom soliton a été pour la première fois employé par les auteurs de [6]

La suite sera organisée de la façon suivante: dans le chapitre I, nous proposons un modèle généralisant le modèle original de Skyrme. Ce modèle comprend outre le pion, les mésons les plus légers. Il est basé sur le modèle σ linéaire dans lequel les mésons vecteurs sont introduits comme des champs de jauge non-abéliens. La symétrie de jauge est brisée ensuite par des termes phénoménologiques de masse. Le Lagrangien sera construit de façon à respecter les symétries importantes des interactions fortes. Il dépend, comme on le verra, de plusieurs paramètres qui, conformément à l'esprit de notre approche, vont être fixés par la physique des mésons. Nous nous intéressons ensuite aux solutions de type soliton de la théorie, qui vont être identifiées aux baryons. Pour savoir dans quelle mesure cela est raisonnable, il faut tester le modèle sur des observables bien connues expérimentalement de la physique des baryons. Nous nous sommes essentiellement concentré sur l'interaction nucléon-nucléon que nous dérivons de l'interaction soliton-soliton. A l'issue de cette étude nous saurons plus précisément si notre généralisation du modèle de Skyrme peut être considérée comme un bon candidat pour la théorie unifiée des mésons et des baryons aux basses énergies.

Comme nous l'avons mentionné plus haut les solitons sont des objets semi-classiques. Il s'avère important alors d'estimer les fluctuations quantiques à leur masses. D'une manière générale nous pensons que les chances de réussite d'une théorie effective peuvent être mesurées dans le cadre de l'approximation semi-classique. Les premières corrections quantiques aux observables (par exemple la masse) du soliton sont particulièrement importantes à cet égard. Le chapitre II est consacré à l'étude de l'énergie due aux fluctuations du vide autour des solutions classiques. Le modèle de Skyrme y est analysé dans cet optique afin de déterminer s'il est cohérent avec le développement semi-classique. Si ce n'est pas le cas, nous verrons dans quelle direction il faudrait chercher à le généraliser.

Nous avons été aussi intéressés par le mécanisme de stabilisation du soliton par un méson ρ . Ce problème n'a été que partiellement traité par le passé, donnant naissance

ainsi à des ambiguïtés sur le rôle joué par ce méson dans la stabilité du soliton. Dans le chapitre III nous allons élucider ce problème en mettant l'accent sur l'importance des lois de transformation chirales du méson ρ . Nous proposons un nouveau lagrangien minimal pour le système $\pi\rho$ et nous étudions la stabilité du soliton correspondant.

Tirant leçon de nos travaux nous allons esquisser une conclusion concernant la tentative d'interpréter les baryons comme les solitons topologiques d'une théorie de mésons et proposer des directions de recherche pour améliorer notre connaissance actuelle du problème.

Chapitre I

Un modèle des interactions fortes à basses énergies

Comme nous l' avons mentionné dans l' introduction, Skyrme a proposé, il y a trente ans, un modèle unifiant les mésons et les baryons. Dans ce modèle le Lagrangien de départ ne contient que des mésons et les baryons apparaissent comme des solitons topologiques. Plus récemment la recherche d' un schéma d' approximation de la QCD non-perturbative a fourni des arguments confirmant l' idée de Skyrme.

D' abord t' Hooft [13] a montré qu' il existe un paramètre de développement non-trivial dans les théories de jauge non-abéliennes: le nombre de couleurs. Quand ce paramètre devient grand QCD se réduit à une théorie effective de mésons faiblement couplés entre eux. Dans les théories à couplage faible il existe parfois des solutions de type monopole ayant une masse inversement proportionnelle à la constante de couplage. Witten [14] a appliqué cette idée au cas de la QCD pour émettre la conjecture que les baryons peuvent être considérés comme des solitons à la limite où N_c devient infini.

Dans ce chapitre nous allons suivre la conjecture de Witten et essayer de construire un Lagrangien effectif basé sur notre connaissance phénoménologique de la physique des mésons. Notre motivation principale est la construction d' un modèle théorique simple et cohérent pour la description unifiée de la physique des hadrons aux basses énergies. Dans la section 1 nous présentons le modèle de Skyrme et résumons son pouvoir prédictif dans le secteur des baryons tel qu' il apparaît dans la littérature. La section 2 mettra en évidence la nécessité de généraliser ce modèle primitif pour rendre compte de la phénoménologie des hadrons. Nous allons proposer ensuite (section 3) un modèle basé sur la physique des mésons les plus légers: $\pi - \rho - \omega - A_1 - \epsilon$. Les paramètres du modèle vont être fixés sur les observables du secteur des mésons dans la section 4. Les solutions classiques de type soliton représentant les baryons sont recherchées dans la section 5. L' interaction baryon-baryon est calculée dans la section 6. Le chapitre se terminera par la section 7 dans laquelle nous allons présenter les résultats et nos conclusions sur le modèle proposé ici.

1. Les solitons du modèle de Skyrme

Le Lagrangien effectif le plus simple formulé en termes de pions et réalisant la brisure spontanée de la symétrie chirale est celui du modèle σ non-linéaire:

$$\mathcal{L}_{\sigma NL} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad (1.1)$$

f_π est la constante de désintégration du pion expérimentalement bien déterminée ($f_\pi = 0.093$ GeV). La matrice $U = \exp(i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{f_\pi})$ contient le champ du pion $\vec{\pi}$ et est un élément du groupe $SU(2)$. La conséquence immédiate de l'unitarité de la matrice U est la présence d'un courant conservé,

$$B^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \text{Tr}(\partial_\nu U U^\dagger \partial_\alpha U U^\dagger \partial_\beta U U^\dagger) \quad (1.2)$$

Il est clair sur cette formule même que B^μ satisfait à une loi de conservation $\partial_\mu B^\mu = 0$ qui ne résulte pas d'une symétrie du Lagrangien. Ce courant est identifié au courant baryonique. Il a été montré dans la réf. [14] que si le terme de Wess-Zumino est ajouté au Lagrangien (1.1) les solitons de ce modèle ont les nombres quantiques des baryons.

En fait pour le cas des deux saveurs, qui est celui que l'on considérera, le terme d'anomalie est nul si l'on considère une théorie de pions uniquement. Mais il a été montré dans la réf. [15] que le courant baryonique (1.2) même dans le cas de $SU(2)$ peut être retrouvé en considérant la contribution des boucles de fermions au courant $U(1)$.

Cependant le modèle (1.1) ne possède pas de solutions statiques d'énergie finie car il est instable par rapport aux dilatations [16]. Des solutions classiques stables existent uniquement en la présence de termes d'ordre supérieur. Le premier candidat suggéré pour la description des baryons comme des solitons d'une théorie où les mésons sont les champs élémentaires est le modèle de Skyrme, dont le Lagrangien est de la forme:

$$\mathcal{L}_{SK} = \mathcal{L}_{\sigma NL} + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger][\partial^\mu U U^\dagger, \partial^\nu U U^\dagger]) \quad (1.3)$$

e étant un paramètre sans dimension. En développant le champ U en puissances du champ du pion

$$\begin{aligned} U &= \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)) \\ &= 1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x) - \frac{\vec{\pi}^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

on obtient le secteur à charge topologique nulle. Les différents termes obtenus en remplaçant l'expression (1.4) dans (1.3) décrivent les interactions dans le secteur des pions. Le secteur des baryons correspond à des configurations non-triviales dans lesquelles le champ U pointe radialement dans l'espace de configuration et dans l'espace d'isospin:

$$\begin{aligned} U &= \exp(i\vec{\tau} \cdot \hat{r} F(r)) \\ &= \cos F(r) + i(\vec{\tau} \cdot \hat{r}) \sin F(r) \end{aligned} \quad (1.5)$$

\hat{r} étant le vecteur unitaire radial dans l'espace des coordonnées. Cette configuration est communément appelée hérisson (hedgehog) pour des raisons évidentes. Les solutions classiques de charge baryonique n , n étant un nombre entier, doivent vérifier les conditions aux limites $F(0) = n\pi$ et $F(\infty) = 0$. On peut en fait montrer que la charge topologique du soliton est:

$$Q = \int d^3x B_0[F(r)] = \frac{1}{\pi} (F(0) - F(\infty)) = n. \quad (1.6)$$

La fonction "chirale" $F(r)$ est trouvée en extrémisant l'énergie statique du soliton pour une valeur donnée de n . Cette extrémisation consiste à résoudre les équations du mouvement classiques. L'objet qui en résulte ne peut cependant pas encore être identifié aux baryons de la Nature (nucléons, deltas etc..), car la configuration unitaire U (eq. (1.5)) est dégénérée en

spin et en isospin. Un procédé de quantification de ces degrés de liberté consiste à effectuer une rotation de la solution U dans l'espace de spin et d'isospin et ensuite la projeter sur les états propres de spin et d'isospin. Ce procédé a été utilisé par les auteurs de [17], qui ont ainsi calculé les propriétés statiques du secteur $B=1$ (nucléon, delta). Leurs résultats montrent que les baryons du modèle de Skyrme sont assez proches de ceux observés dans la nature, l'accord étant de $\approx 30\%$.

Cependant, dans leur approche la constante de désintégration du pion f_π a été prise égale à $\approx 0.06 \text{ GeV}$, largement inférieure à la valeur expérimentale. Si on veut préserver la description de la physique des mésons au niveau du Lagrangien effectif on ne peut pas se donner la liberté de modifier la valeur expérimentale de f_π . On comprend pourquoi la conclusion principale de plusieurs auteurs[†] sur le secteur $B = 1$ du modèle de Skyrme est finalement la suivante:

La masse du baryon s'avère être trop large dans le modèle de Skyrme si les paramètres du Lagrangien sont fixés sur la physique des mésons.

Une autre observable de la physique des hadrons à basses énergies très bien déterminée expérimentalement et fournissant un test sévère pour les modèles théoriques est l'interaction nucléon-nucléon. Il est donc naturel de se demander, si le modèle de Skyrme reproduit les caractéristiques bien connues de cette interaction. Pour ceci, il faut construire le secteur $B = 2$ du Lagrangien (1.3), et le projeter sur les canaux de spin et d'isospin de l'opérateur potentiel NN . Une méthode simple et systématique a été inventée dans [18]. Ces auteurs ont trouvé (leurs résultats sont en accord avec ceux de la réf. [19] qui utilisent une méthode sérieusement plus compliquée car elle fait appel à des degrés de liberté de quarks) que les canaux spin-spin et tenseur de l'interaction entre deux baryons du Lagrangien (1.4) sont bien reproduits, surtout à longue distance. Par contre, les forces dans le canal central de

[†] qui ultérieurement ont remis f_π à sa valeur expérimentale.

l'interaction nucléon-nucléon sont répulsives pour toute séparation R entre les nucléons, comme il est montré sur la figure (1.1).

Quand on sait que la liaison des noyaux est justement due à une (faible) attraction dans ce canal de l'interaction, on peut faire la remarque suivante sur le secteur $B = 2$ du modèle de Skyrme

Les baryons du modèle de Skyrme ne peuvent pas former des noyaux, car à moyenne portée leurs interactions sont répulsives.

Notons au passage que récemment, un calcul numérique [20] a montré qu'une attraction émerge quand on résout exactement le système $B = 2$. Cette attraction est cependant d'une portée plus grande que celle qui est nécessaire à la cohésion des noyaux.

Ces résultats sur la masse du nucléon et l'interaction NN peuvent conduire à penser que les modèles où les nucléons sont des solitons topologiques ne sont pas vraiment réalistes. Toutefois, avant de remettre en cause l'approche toute entière, on peut se demander si le Lagrangien (1.3) décrit de façon réaliste la physique des mésons. Il est à cet égard essentiel de préciser que le terme de Skyrme n'est qu'un terme parmi l'infinité de termes qui constituent le développement en puissances de dérivées du champ du pion. A priori il n'y a pas de raison de sélectionner ce terme particulier d'ordre quatre, et non pas l'autre terme d'ordre quatre (symétrique en dérivées du champ du pion), ou même des termes d'ordre six, etc... .

D'un autre côté, il existe une pléiade de résultats expérimentaux montrant l'existence de résonances dans les ondes S , P etc. de l'amplitude de diffusion $\pi\pi$. Par exemple, on sait que l'onde S de la diffusion $\pi\pi$ est dominée par une résonance autour de 1 GeV (le méson ϵ). Les expériences de diffusion $\pi\pi$ ont révélé aussi l'existence de résonances dans les ondes de spin-1, bien en dessous de 1 GeV: les mésons ρ et ω (de masses 0.77 GeV et 0.78 GeV respectivement). Ces mésons constituent des pôles de l'amplitude de diffusion et ils ne peuvent pas être contenus dans des Lagrangiens locaux comme ceux du type (1.3) définis

en termes du champ du pion uniquement. Comme à l'heure actuelle, il n'existe pas d'approche systématique capable d'engendrer dynamiquement des résonances en théorie des perturbations, un bon point de départ pour rendre compte du rôle de ces résonances dans la physique des hadrons à basse énergie est de les introduire directement dans le Lagrangien effectif.

L'avantage des Lagrangiens effectifs en termes de mésons (pion, méson scalaire, mésons vecteurs etc...) est de fournir une description unifiée des mésons et des baryons comme il a été suggéré dans [21].

2. Généralisations du modèle de Skyrme

Ces observations sur la nécessité de généraliser le modèle de Skyrme ont conduit de nombreux auteurs à construire des Lagrangiens à partir des mésons au-delà du pion, et examiner leurs effets sur les propriétés statiques des baryons. On a vite réalisé que le terme de Skyrme, aussi bien qu'un des termes d'ordre six dans le développement chiral, peuvent être interprétés comme les limites locales d'un Lagrangien contenant les mésons ρ [22] et ω [23] explicitement. Par exemple le terme d'ordre six qui n'est rien d'autre que le courant baryonique au carré:

$$\mathcal{L}_6 = -b B^\mu B_\mu , \quad (2.1)$$

est la limite du Lagrangien de la réf. [23] quand le méson ω devient très massif (le paramètre b peut être relié au couplage $\omega\pi\pi\pi$ comme on verra par la suite). Une étude des effets des mésons vecteurs (ω, ρ, A_1) dans le secteur baryonique a été effectuée dans [24-25]. Il y a été trouvé que les propriétés statiques des baryons sont sensiblement améliorées par rapport au modèle de Skyrme original (à part la masse du baryon qui reste trop large).

Pour ce qui est des degrés de liberté scalaires, ils ont d'abord été introduits dans le Lagrangien effectif à travers un terme d'ordre quatre dans le développement chiral, symétrique dans les dérivées du champ U :

$$\mathcal{L}_S = \gamma [\text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)]^2 \quad (2.2)$$

La constante γ est directement liée aux longueurs de diffusion a_0 et a_2 de l'interaction $\pi\pi$. En ce qui concerne les baryons, il n'est pas difficile de voir sur cette relation que la contribution à la masse du soliton provenant de \mathcal{L}_S est négative. Alors que cette observation montre d'abord que le seul méson ayant la propriété de faire baisser la masse du soliton au niveau même de l'approximation locale est bien le méson scalaire, le signe négatif de cette contribution peut entraîner une déstabilisation du soliton. Dans la réf. [26] la valeur critique de la constante γ (au-delà de laquelle les solutions sont instables) est déterminée aussi bien que les propriétés statiques des baryons dans un régime de γ inoffensif pour la stabilité. Il y a été trouvé que les prédictions pour la masse du baryon sont améliorées par la seule inclusion de ce terme. Par ailleurs, une extension “non-locale” de ce Lagrangien, de façon à inclure les effets du méson scalaire quand ce dernier est de masse finie a été étudiée dans [27][†] dans le cadre de l'interaction nucléon-nucléon. Des forces attractives apparaissent dans le canal central de cette interaction, mais elles sont de longue portée. A moyenne portée la répulsion, bien que diminuée par rapport à celle du modèle de Skyrme, persiste. En fait l'inclusion du champ scalaire dans cette approximation n'a que peu d'effets sur le champ du ω qui est le principal responsable de la répulsion. Dans la section 3, on étudiera une façon d'inclure le champ scalaire qui aura aussi des effets non-triviaux sur le champ du ω .

Il faut aussi préciser ici que la présence du méson scalaire n'est pas seulement dictée par la phénoménologie mésonique. Elle peut aussi traduire, au niveau du Lagrangien effectif, l'

[†] où le méson ω est aussi présent

anomalie d' échelle de la QCD [28]. Dans ce contexte, l' interaction nucléon-nucléon acquiert des contributions attractives dans son canal central, mais là encore cette attraction est de longue portée [29].

Nous allons maintenant construire un Lagrangien effectif contenant les mésons les plus légers (π , ρ , A_1 , ω et le méson scalaire ϵ), d' une façon qui respecte la symétrie chirale, les anomalies du secteur mésonique et de façon générale les propriétés de basse énergie de ces mésons.

3. Un modèle unifiant les mésons et les baryons

Nous allons présenter dans cette section un modèle [30] qui constitue une extension du Lagrangien effectif proposé par les auteurs de la réf. [24], de façon à inclure des degrés de liberté scalaires. En gardant les motivations des auteurs de cet article, on examinera les effets de l' inclusion de la résonance scalaire du canal S de la diffusion $\pi\pi$, sur le secteur des mésons et surtout sur la physique des baryons.

Le Lagrangien sera divisé en deux parties, celle qui correspond au secteur $SU(2) \otimes SU(2)$ décrivant la physique des interactions des mésons π, ϵ, ρ, A_1 à laquelle on ajoutera la partie décrivant les interactions du pion dans le secteur $U(1)$ avec le méson ω . Dans cette deuxième partie nous allons inclure les couplages anormaux du pion aux mésons vecteurs par l' intermédiaire du terme d' anomalie de Wess-Zumino. Ecrivons d' abord ce Lagrangien, on verra ensuite comment y arriver:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\pi\xi\rho A_1} + \mathcal{L}_{\pi\omega} \quad (3.1)$$

avec $\mathcal{L}_{\pi\xi\rho A_1}$ donné par:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\xi\rho A_1} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{\xi^2}{4}\text{Tr}(D_\mu U D^\mu U^\dagger) - \lambda(\xi^2 - \Gamma^2)^2 - \frac{1}{8}\text{Tr}(X_{\mu\nu}^2 + Y_{\mu\nu}^2) \\
& + \frac{m_\rho^2}{4}\text{Tr}(X_\mu^2 + Y_\mu^2) + \frac{\Delta m^2}{8}\text{Tr}(X_\mu^2 + Y_\mu^2 - 2U^\dagger X_\mu U Y^\mu)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

et $\mathcal{L}_{\pi\omega}$ par l' expression:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\omega} = & -\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}^2 + \frac{m_\omega^2}{2}\omega_\mu^2 + \beta_\omega\omega_\mu B^\mu \\
& - i\frac{\beta_\omega g}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\omega_\nu\text{Tr}(X_\alpha L_\beta - Y_\alpha R_\beta + ig(UY_\alpha U^\dagger X_\beta - Y_\alpha X_\beta))
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dans les expressions (3.2) et (3.3) les champs ξ and ω_μ représentent le champ scalaire et celui du ω respectivement. Nous avons utilisé les définitions suivantes:

$$\begin{aligned}
U &= e^{\frac{i}{f_\pi}\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}} \\
D_\mu U &= \partial_\mu U + ig(X_\mu U - U Y_\mu) \\
X_{\mu\nu} &= \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu + ig[X_\mu, X_\nu] \\
Y_{\mu\nu} &= \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu + ig[Y_\mu, Y_\nu] \\
B^\mu &= \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2}\text{Tr}(L_\nu L_\alpha L_\beta) \\
L_\mu &= \partial_\mu U U^\dagger \\
R_\mu &= \partial_\mu U^\dagger U
\end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\vec{\pi}$ est le champ du pion, et les champs $X_\mu = \vec{\tau}\cdot\vec{X}_\mu$ et $Y_\mu = \vec{\tau}\cdot\vec{Y}_\mu$ sont des champs d'isospin unité de chiralité gauche et droite respectivement. On verra dans la section suivante comment ces champs gauche et droit sont reliés au champs des mésons ρ et A_1 . Regardons maintenant de plus près ce Lagrangien.

a) Le Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi\xi\rho A_1}$

La première partie du Lagrangien de l' équation (3.2) est basée sur le modèle σ linéaire. Ce modèle décrit les interactions entre le “pion” $\vec{\phi}$ et son partenaire chiral, le champ σ . Il

est commode de paramétrer ces deux champs de façon compacte par un champ matriciel $\mathcal{V} = \sigma(x) + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)$. Alors la densité Lagrangienne du modèle σ linéaire s'écrit:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial_\mu \mathcal{V} \partial^\mu \mathcal{V}^\dagger) - \lambda \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{V} \mathcal{V}^\dagger) - \Gamma^2 \right)^2 \quad (3.5)$$

Il est clair sur cette expression que la forme bilinéaire $\text{Tr}(\frac{1}{2} \mathcal{V} \mathcal{V}^\dagger)$ doit atteindre la valeur Γ^2 pour minimiser l'énergie potentielle. La constante Γ est reliée à la constante de désintégration du pion f_π .

Récrivons maintenant le champ du quaternion \mathcal{V} de façon à en extraire son contenu isoscalaire ξ :

$$\mathcal{V} = \xi(x) U(x) = \xi(x) \exp \left(\frac{i}{f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x) \right) \quad (3.6)$$

où $\xi(x)$ est défini par $\xi^2(x) = \sigma^2(x) + \vec{\pi}^2(x)$, cette définition manifestant son caractère scalaire par une rotation chirale. L'équation (3.5) est mise maintenant sous la forme:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{\xi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) - \lambda(\xi^2 - \Gamma^2)^2 \quad (3.7)$$

Le modèle σ non-linéaire peut être retrouvé lorsque le paramètre λ tend vers l'infini. En effet, quand $\lambda \rightarrow \infty$, ξ doit tendre vers la valeur Γ pour que l'énergie potentielle dans l'équation (3.7) soit non-infinie.

Il faut remarquer que cette écriture du modèle σ linéaire simplifie considérablement le formalisme, car les champs U et ξ ont des propriétés de transformation simples pour une rotation chirale.

En effet, la loi de transformation des champs U et ξ par une rotation $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ est:

$$\begin{aligned}
U &\rightarrow A(x) U B^\dagger(x) \\
\xi &\rightarrow \xi
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

avec les matrices $A(x) \in SU(2)_L$ et $B(x) \in SU(2)_R$. Il suffit de rendre maintenant le Lagrangien (3.7) invariant sous une transformation chirale locale. La substitution des gradients $\partial_\mu U$ par les gradients covariants $D_\mu U$ définis plus haut, assure l'invariance locale de l'action. Au Lagrangien obtenu il faut maintenant ajouter les termes cinétiques des champs de jauge gauche et droit, et le résultat sera invariant sous les transformations (3.8) pour U et ξ et

$$\begin{aligned}
X_\mu &\rightarrow AX_\mu A^\dagger - \frac{i}{g} A \partial_\mu A^\dagger \\
Y_\mu &\rightarrow BY_\mu B^\dagger - \frac{i}{g} B \partial_\mu B^\dagger
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

pour les champs X_μ et Y_μ . La symétrie locale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ est ensuite brisée de façon minimale en ajoutant des termes de masse pour les champs gauche et droit. Remarquons ici que le méson scalaire introduit par le biais du modèle sigma linéaire, donne lieu à une contribution positive à l'énergie comme l'équation (3.7) le montre. Un autre avantage de jauger le groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ est d'avoir une description symétrique des mésons ρ et A_1 , car ils sont décrits en tant que partenaires chiraux.

b) Le Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi\omega}$

L'équation (3.3) décrit le secteur $U(1)$ des interactions mésoniques aux basses énergies. Le premier terme dans cette équation décrit le couplage du ω aux trois pions dans le secteur des mésons, et son couplage au courant baryonique. Ensuite vient le terme d'anomalie que l'on doit inclure, pour tenir compte des anomalies du secteur $U(1)$ [31]. Mis à part ces considérations dans le secteur des mésons, le couplage du ω au courant baryonique est essentiel pour la stabilité des solutions classiques [32] dans notre cas où le champ chirale se couple à des champs de Yang-Mills massifs. Si on adopte ce point de vue, la présence

du ω dans le Lagrangien effectif est donc d' une importance capitale pour la physique des baryons (stabilité) aussi bien que pour celle des mésons (anomalies).

En fait, ces anomalies sont dûes à la présence d' une symétrie discrète que le modèle sigma (non)-linéaire possède, et qui n' est pas observée dans la nature. Cette symétrie “redondante” interdirait des processus où le nombre des bosons n' est pas conservé [14]. Le terme de Wess-Zumino effectif, assure que l' on tient compte de ces processus dans le secteur mésonique du Lagrangien effectif, car il brise cette symétrie. La dérivation du terme d' anomalie quand les champs de jauge sont présents, peut être trouvée dans la littérature [33].

On n' a pas considéré le couplage direct des degrés de liberté scalaires au méson ω . Ces couplages ont été étudiés dans [34], pour la photoproduction de pions. Les résultats montrent que les couplages du type $\xi^2 \omega_\mu^2$ engendrent un état lié dans l' onde S, en désaccord avec la phénoménologie.

On va s' intéresser maintenant aux propriétés de transformation du Lagrangien (3.1). Celles-ci peuvent être utilisées pour calculer les courants de Noether associés à des rotations de $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$ aussi bien que celles de $U(1)$.

Effectuons des transformations locales sur les champs du Lagrangien (3.1)

$$\begin{aligned} U &\rightarrow U + iQ_L U \\ X_\mu &\rightarrow X_\mu + i[Q_L, X_\mu] - \frac{\partial_\mu Q_L}{g} \quad Q_L = \frac{\vec{\epsilon}_L(x) \cdot \vec{\tau}}{2} \\ Y_\mu &\rightarrow Y_\mu \end{aligned} \tag{3.10a}$$

pour $SU(2)_L$ et

$$\begin{aligned} U &\rightarrow U - iU Q_R \\ Y_\mu &\rightarrow Y_\mu + i[Q_R, Y_\mu] - \frac{\partial_\mu Q_R}{g} \quad Q_R = \frac{\vec{\epsilon}_R(x) \cdot \vec{\tau}}{2} \\ X_\mu &\rightarrow X_\mu \end{aligned} \tag{3.10b}$$

pour $SU(2)_R$. $\vec{\epsilon}_L(x)$ et $\vec{\epsilon}_R(x)$ sont des fonctions arbitraires. La variation du Lagrangien satisfait alors les relations suivantes (à une intégration par parties près):

$$\begin{aligned}\delta_{SU(2)_L} \mathcal{L} &= -(\partial_\mu \vec{j}_L^\mu) \vec{\epsilon}_L + (-\vec{j}_L^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{X}_\mu} \frac{1}{2g}) \partial_\mu \vec{\epsilon}_L \\ \delta_{SU(2)_R} \mathcal{L} &= -(\partial_\mu \vec{j}_R^\mu) \vec{\epsilon}_R + (-\vec{j}_R^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{Y}_\mu} \frac{1}{2g}) \partial_\mu \vec{\epsilon}_R\end{aligned}\tag{3.11}$$

avec les courants gauches et droits $\vec{j}_L^\mu, \vec{j}_R^\mu$. En calculant les membres de gauche de ces équations avec les lois de transformation (3.10) et en combinant les expressions de ces courants on arrive à l' expression des courants vecteurs et axiaux:

$$\begin{aligned}\vec{V}_\mu = \vec{j}_\mu^L + \vec{j}_\mu^R &= i\text{Tr} \left\{ \vec{\tau} \left[\frac{1}{4} ([X^\nu, X_{\mu\nu}] + [Y^\nu, Y_{\mu\nu}]) + \frac{\xi^2}{4} (D_\mu U U^\dagger + D_\mu U^\dagger U) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta_\omega}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\rho\nu\alpha} [\omega^\rho \partial^\nu (L^\alpha - R^\alpha) + ig \partial^\rho \omega^\nu (-X^\alpha + Y^\alpha + U^\dagger X^\alpha U - U Y^\alpha U^\dagger)] \right] \right\},\end{aligned}\tag{3.12a}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}_\mu = \vec{j}_\mu^L - \vec{j}_\mu^R &= i\text{Tr} \left\{ \vec{\tau} \left[\frac{1}{4} ([X^\nu, X_{\mu\nu}] - [Y^\nu, Y_{\mu\nu}]) + \frac{\xi^2}{4} (D_\mu U U^\dagger - D_\mu U^\dagger U) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta_\omega}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\rho\nu\alpha} [\omega^\rho \partial^\nu (L^\alpha + R^\alpha) - ig \partial^\rho \omega^\nu (X^\alpha + Y^\alpha + U^\dagger X^\alpha U + U Y^\alpha U^\dagger)] \right] \right\}\end{aligned}\tag{3.12b}$$

On peut montrer que ces courants, toujours en vertu de l' équation (3.11), satisfont aux équations suivantes:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \vec{V}^\mu &= 0 \\ \partial_\mu \vec{A}^\mu &= -\frac{i}{8} \text{Tr} \left[\vec{\tau} \frac{g^2 \beta_\omega}{\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu \omega^\nu (X^\alpha Y^\beta + Y^\alpha X^\beta) \right]\end{aligned}\tag{3.13}$$

Ces relations, témoignent de la conservation du courant vectoriel et de la non-conservation du courant axial, cette dernière étant due à l' anomalie. Elles sont bien connues et vérifiées par l' expérience. Pour retrouver PCAC, il faut ajouter un terme de masse du pion comme

il a été fait dans [24]. Il est utile d'observer aussi que dans le terme qui couple le ω aux champs π , X et Y (équation (3.3)) le contreterme de Bardeen (proportionnel à g^2) assure que l'anomalie subsiste uniquement dans le courant axial (équation (3.13)). Cette soustraction a aussi pour effet de briser explicitement la symétrie chirale.

Le courant $U(1)$ déduit du Lagrangien (3.1) est identifié au courant baryonique. Son expression est:

$$\mathcal{J}_{I=0}^\mu = \frac{B^\mu}{2} - \frac{ig}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[\partial_\nu (X_\alpha L_\beta - Y_\alpha R_\beta + ig(UY_\alpha U^\dagger X_\beta - Y_\alpha X_\beta))] \quad (3.14)$$

Ce courant est normalisé à la moitié du nombre baryonique et satisfait à la relation $\partial_\mu \mathcal{J}_{I=0}^\mu = 0$, car comme on a vu dans la section 1 B_μ est conservé et la contribution du terme de Wess-Zumino à (3.14) est une divergence totale.

Notre Lagrangien de mésons possède une structure conforme aux propriétés générales des interactions fortes, nous pouvons maintenant examiner sa limite locale, c'est à dire les termes du développement chirale en puissances de dérivées du champ du pion qui en résultent lorsque les autres mésons ($\rho, \omega, A_1, \epsilon$) deviennent très massifs. Nous avons déjà remarqué que quand le paramètre λ (qui est proportionnel au carré de la la masse du méson scalaire) devient très grand on retrouve le modèle σ non-linéaire. Pour ce qui est de la contribution des mésons vecteurs, on peut montrer (Appendice C) en utilisant les equations d' Euler-Lagrange pour les champs X_μ, Y_μ et ω_μ , qu' en l' absence du terme de Wess-Zumino et quand les masses $m_\omega, m_\rho, m_{A_1}$ deviennent très grandes le Lagrangien se réduit à:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{2+4+6} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{64g^2} \text{Tr}([\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2) - \frac{\beta_\omega^2}{2m_\omega^2} B_\mu B^\mu \quad (3.15)$$

On obtient donc les premiers termes du développement chirale avec l' absence du terme d' ordre quatre symétrique en dérivées du champ du pion. Cette propriété est la bienvenue

car elle empêche la déstabilisation du soliton comme il a été vu plus haut. Elle est une conséquence de l' introduction du champ scalaire par le biais du modèle sigma linéaire: seuls les termes ayant une contribution positive à l' énergie sont présents.

On a donc répondu à la demande des sections 1 et 2 en construisant un Lagrangien qui généralise le modèle de Skyrme. Pour savoir si ce modèle a des chances d' être un bon modèle effectif, on doit d' abord examiner les prédictions de ce Lagrangien pour les observables dans le secteur mésonique.

4. Le secteur des mésons

Nous allons nous intéresser maintenant aux masses, couplages et propriétés des mésons dans notre modèle. Les différentes observables de ce secteur sont obtenues en développant le champ U en puissances du champ du pion:

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(\frac{i}{f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)\right) \\ &= 1 + \frac{i}{f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x) - \frac{1}{f_\pi^2} \frac{\vec{\pi}^2(x)}{2} + \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le champ du méson ϵ est relié au champ ξ par la relation $\epsilon = \Gamma - \xi$. En remplaçant cette expression dans l' équation (3.2) on trouve la relation pour la masse du scalaire: $m_\epsilon^2 = 8\lambda\Gamma^2$.

Considérons maintenant la contribution dans le secteur des mésons des termes qui ne dépendent pas du champ scalaire dans l' équation (3.1), et remplaçons U par son développement en champ du pion. Il est facile de voir que si l' on utilise la définition naive du champ axial $A^\mu = (X_\mu - Y_\mu)$ on obtient des couplages linéaires avec le champ du pion : $(Cte)\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{A}^\mu$. Pour les faire disparaître, on doit diagonaliser le Lagrangien à l' ordre le plus bas. Le résultat de cette diagonalisation aussi bien que de l' identification de la masse physique du méson A_1 est exprimé par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{X}_\mu + \vec{Y}_\mu) \\
\vec{A}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{X}_\mu - \vec{Y}_\mu + \frac{2gf_\pi}{m_\rho^2 + \Delta m^2} \partial_\mu \vec{\pi}) \\
m_{A_1} &= \frac{m_\rho^2 + \Delta m^2}{(m_\rho^2 + \Delta m^2 - 2g^2 f_\pi^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

La présence des champs de jauge conduit à la relation suivante entre la constante Γ et f_π :

$$\Gamma^2 = f_\pi^2 \frac{m_{A_1}^2}{m_\rho^2 + \Delta m^2}.$$

En sélectionnant maintenant les termes cubiques et quartiques dans les champs, on obtient les couplages d'interaction forte des mésons. Il est aussi possible d'obtenir les interactions électromagnétiques de ces mésons. Pour cela, il suffit de jager le groupe $U(1)$ -électromagnétique dans l'équation (3.1).

Ces couplages peuvent être utilisés pour le calcul d'observables mésoniques au premier ordre des perturbations. Nous donnons ici l'expression de la largeur $\Gamma_{A_1 \rightarrow \epsilon \pi}$ calculée avec le Lagrangien (3.1), d'autres expressions pouvant être trouvées dans [24]:

$$\Gamma_{A_1 \rightarrow \pi \epsilon} = \frac{8\Gamma^2 g^2}{192\pi m_{A_1}^5 f_\pi^2} \left[1 - \frac{2g^2 f_\pi^2}{m_\rho^2 + \Delta m^2} \right]^2 [(m_{A_1}^2 + m_\pi^2 - m_\epsilon^2)^2 - 4m_{A_1}^2 m_\pi^2]^{\frac{3}{2}} \tag{4.3}$$

Les observables mésoniques, comme l'illustre la relation (4.3) dépendent des paramètres présents dans le Lagrangien (3.1). On fixe ces paramètres en ajustant certaines de ces observables, ce qui donne:

$$m_\rho = 0.769 \text{ GeV}$$

$$m_\omega = 0.782 \text{ GeV}$$

$$g = 3.78$$

$$\Delta m^2 = -0.462 m_\rho^2$$

$$f_\pi = 0.093 \text{ GeV}$$

$$\beta_\omega = 9.3$$

m_ρ, m_ω ont été prises égales aux masses physiques de ces mésons. Les valeurs de g et Δm^2 reproduisent la valeur expérimentale de la masse du méson A_1 ($m_{A_1} = 1.194$ GeV) et la largeur $\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}$. Celle de β_ω reproduit la largeur électromagnétique de désintégration du ω en un pion et un photon. En ce qui concerne la masse du méson ϵ (proportionnelle à $\sqrt{\lambda}$), remarquons que ce dernier a une largeur assez grande. Nous avons préféré pour cette raison laisser libre m_ϵ , à varier entre 0.5 GeV et 1.0 GeV.

Une fois les paramètres fixés sur les observables mésoniques, il faut remarquer que le Lagrangien (3.1) peut prédire d'autres observables dans le secteur des mésons. Ceci a été illustré dans la référence [24] où le modèle σ non-linéaire était à l'étude (la limite $\lambda \rightarrow \infty$ de notre modèle). Dans le cadre de notre modèle, le choix de la valeur de 1 GeV pour la masse du scalaire donne pour la largeur partielle du A_1 (équation (4.3)) une valeur de 0.1 %, qui est en accord avec la limite expérimentale (≤ 1.0 %).

Le couplage du méson A_1 au champ scalaire ϵ modifie la constante de couplage $\epsilon\pi\pi$: $\delta_\epsilon = \frac{\Gamma}{2}(1 - \frac{4g^2 f_\pi^2}{m_\rho^2 + \Delta m^2})$. En utilisant cette relation, on peut éventuellement donner une prédiction pour les longueurs de diffusion $\pi\pi$ qui dépendent de δ_ϵ . Avec $m_\epsilon = 1$ GeV on obtient $a_0 = 0.235$ fm et $a_2 = -0.056$ fm, à comparer aux valeurs expérimentales $a_0 = 0.36 \pm 0.07$ fm et $a_2 = -0.039 \pm 0.017$ fm [35].

En résumé, nous avons déterminé les paramètres du modèle σ linéaire, de façon à ce qu'il puisse décrire correctement la physique des mésons $\pi, \rho, \omega, A_1, \epsilon$ et de leurs interactions. Une fois ces paramètres fixés sur un nombre d'observables égal au nombre de ces paramètres, il est clair que ce Lagrangien possède encore un pouvoir de prédiction important dans le secteur des mésons [24].

Nous allons examiner maintenant à quel point une théorie réaliste de mésons peut être utilisée pour décrire aussi les baryons. Ceux-ci se trouvent dans le secteur non-trivial du Lagrangien effectif, celui des solitons topologiques.

5. Le secteur baryonique

Construisons d'abord les solutions à une unité de charge baryonique. Ces solutions des équations du mouvement, sont statiques et ont une énergie finie.

Les composantes $X_0, Y_0, \omega_i = 0$ sont nulles à la limite statique. On considère les champs classiques (hérisson) suivants:

$$\begin{aligned}
U &= \exp(i\vec{\tau} \cdot \hat{r} F(r)), \\
X_i &= \alpha(r)\tau_i + (\beta(r) - \alpha(r))(\vec{\tau}\hat{r})\hat{r}_i + \gamma(r)(\vec{\tau} \times \hat{r})_i, \\
Y_i &= -\alpha(r)\tau_i - (\beta(r) - \alpha(r))(\vec{\tau}\hat{r})\hat{r}_i + \gamma(r)(\vec{\tau} \times \hat{r})_i, \\
\omega_0 &= \omega(r), \\
\xi &= \xi(r)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

où les profils $F, \alpha, \gamma, \beta, \omega, \xi$ sont des fonctions radiales. L' énergie de la configuration de type soliton est égale à $-\int \mathcal{L} d^3\vec{r}$. Son expression est donnée par:

$$\begin{aligned}
E &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ 4\left(\frac{\gamma}{r} - g(\alpha^2 + \gamma^2)\right)^2 + 2\left(\dot{\gamma} + \frac{\gamma}{r} - 2g\alpha\beta\right)^2 + 2\left(\dot{\alpha} + \frac{\alpha - \beta}{r} + 2g\beta\gamma\right)^2 \right. \\
&\quad + \frac{\xi^2}{2} [(\dot{F} + 2g\beta)^2 + 2\left(\frac{\sin F}{r} + 2g(\alpha \cos F - \gamma \sin F)\right)^2] + \frac{\dot{\xi}^2}{2} + \lambda(\xi^2 - \Gamma^2)^2 \\
&\quad + m_\rho^2[\beta^2 + 2(\alpha^2 + \gamma^2)] + \Delta m^2[2(\alpha \cos F - \gamma \sin F)^2 + \beta^2] - \frac{1}{2}(\dot{\omega}^2 + m_\omega^2\omega^2) \\
&\quad \left. + \beta_\omega \omega \frac{\sin^2 F}{2\pi^2 r^2} \dot{F} + \beta_\omega g \frac{\dot{\omega}}{2\pi^2} \left[-2\frac{\alpha \sin^2 F}{r} - \frac{\gamma \sin 2F}{r} + 4g\alpha\gamma \sin^2 F - g \sin 2F(\alpha^2 - \gamma^2)\right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nous allons rendre cette fonctionnelle stationnaire par rapport aux variations arbitraires des champs $F, \alpha, \beta, \gamma, \xi, \omega$ en résolvant les équations d' Euler-Lagrange associées. Ces équations sont des équations non-linéaires couplées. On trouvera leurs expressions assez longues et compliquées dans l' Appendice A. Les configurations de nombre baryonique unité et d' énergie finie satisfont aux conditions aux limites $F(0) = \pi, F(\infty) = 0$ pour le champ chirale

et $\dot{\xi}(0) = 0$, $\xi(\infty) = \Gamma$ pour le champ scalaire. Celles pour les champs de jauge résultent des équations du mouvement et sont données par: $\dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\omega}(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$, $\alpha(\infty) = \beta(\infty) = \gamma(\infty) = \omega(\infty) = 0$. Les solutions classiques pour les profils F et ϵ sont présentées sur la figure (1.2).

Les solutions des équations du mouvement diffèrent tant qualitativement que quantitativement de celles du modèle non-linéaire. Un des aspects essentiels du couplage du scalaire au champ chirale est la diminution de la fonction de profil F à l'intérieur du soliton comme il est clair sur la figure (1.2). Cet effet du champ scalaire a été aussi observé dans la réf. [29]. Mais dans notre modèle, la présence du champ scalaire influence aussi la solution classique des champs $\alpha, \beta, \gamma, \omega$, comme il est manifeste sur la figure (1.3).

En effet, comme nous pouvons le constater sur cette figure, le couplage du champ scalaire aux champs de jauge via le terme $\frac{\xi^2}{4} \text{Tr}(D_\mu U D^\mu U^\dagger)$ supprime fortement ces champs au niveau classique (d'un facteur 5 quand la masse du scalaire est égale à 0.5 GeV). Plus étonnant encore est l'effet sur le champ classique du ω . Ce dernier voit sa portée réduite dans le cas linéaire. Ce phénomène, est observé uniquement quand les mésons ρ et A_1 sont présents comme nous l'ont indiqué des analyses numériques du cas où la constante g tend vers zéro. Ceci montre l'importance d'inclure les mésons de masse finie dans le Lagrangien effectif. Quels sont maintenant les effets sur les propriétés statiques du soliton? Pour le savoir, il faut calculer des observables telles que la masse, la constante de couplage axiale, etc... Nous avons calculé des quantités qui dépendent seulement des solutions classiques des équations du mouvement, c'est à dire la masse du soliton, le rayon isoscalaire du baryon et la constante de couplage axiale. La masse du soliton est donnée par l'expression (5.2). Pour ce qui est du rayon isoscalaire, en remplaçant les expressions (5.1) dans celle de la densité baryonique ($2\mathcal{J}_{I=0}^\mu$), on trouve:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{I=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr \left\{ -\dot{F} \sin^2 F \right. \\ \left. + 4g \sin F [\alpha(1 - 2g\gamma r) \sin F + \gamma \cos F + gr \cos F(\alpha^2 - \gamma^2)] \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

La constante de couplage axiale g_A du nucléon peut être calculée par projection directe sur l'élément de matrice de la troisième composante du courant axial entre deux états de nucléon comme il a été fait dans [17]. En appliquant le théorème de la divergence à l'équation (3.14), on trouve l'expression suivante:

$$g_A = -\frac{4}{3}\pi f_\pi^2 \lim_{r \rightarrow \infty} (r^3 \dot{F}) - \frac{4g^2 \beta_\omega}{3\pi} \int_0^\infty r^3 (\alpha^2 - \gamma^2) \dot{\omega} dr \quad (5.4)$$

Comme il est illustré sur la figure (1.4) la présence du champ scalaire conduit à une diminution notable de la masse classique du soliton, mais aussi de $\langle r^2 \rangle_{I=0}^{\frac{1}{2}}$ et de g_A en comparaison avec le modèle non-linéaire.

6. L'interaction nucléon-nucléon

Pour calculer l'interaction entre deux solitons il est nécessaire d'approximer la forme des champs U, X, Y, ω, ξ dans le secteur $B = 2$, car la forme exacte de ceux-ci dans le cadre de notre modèle est très compliquée à déterminer. Une approximation simple connue sous le nom d'approximation du produit, offre une description raisonnable de l'interaction entre deux solitons statiques, c. a. d. deux solutions du secteur $B = 1$. Cette approximation consiste à supposer que la configuration des champs, quand les deux solitons sont séparés d'une distance \vec{R} , est un produit de la forme:

$$U_0^{B=2}(\vec{r}, \vec{R}) = U_0^{B=1}(\vec{r} - \frac{\vec{R}}{2}) U_0^{B=1}(\vec{r} + \frac{\vec{R}}{2}) \quad (6.1)$$

où $U_0^{B=1}$ est la solution $B = 1$ trouvée dans la section précédente. Les mérites, aussi bien que les défauts de cette approximation sont largement discutés dans la littérature [19]. Pour notre part, nous allons insister sur deux aspects importants que seul l'ansatz du produit contient de façon naturelle. D'abord, étant donné que l'on veut calculer un potentiel local, la définition de la séparation entre les deux solitons doit être dépourvue d'ambiguïtés, ce qui est le cas de l'approximation (6.1). Ensuite, le nombre baryonique associé à la configuration du membre de droite de (6.1) est automatiquement égal à 2. Dans un calcul exact on ne peut tenir compte de ces conditions essentielles sans aggraver la complexité du problème [36].

On ne s'attend pas à ce que l'approximation du produit puisse donner une bonne description de l'interaction aux courtes distances. Cependant, le centre de notre intérêt est la moyenne portée ($R \geq 1$ fm) du potentiel nucléon-nucléon, région où l'approximation du produit devrait être adéquate.

La configuration (6.1) est dégénérée en spin et en isospin, car elle est purement classique. Il en résulte que l'interaction entre les deux objets du membre de droite de cette équation n'est pas identifiable à l'interaction baryon-baryon. Pour construire l'interaction nucléon-nucléon il faut lever cette dégénérescence en effectuant des rotations dans l'espace $SU(2)$ des deux solitons séparément: $U_0(\vec{r} + \frac{\vec{R}}{2}) \rightarrow AU_0(\vec{r} + \frac{\vec{R}}{2})A^\dagger$, $U_0(\vec{r} - \frac{\vec{R}}{2}) \rightarrow BU_0(\vec{r} - \frac{\vec{R}}{2})B^\dagger$ avec les matrices $A = a_0 + i\vec{\tau} \cdot \vec{a}$ et $B = b_0 + i\vec{\tau} \cdot \vec{b}$.

On suppose maintenant que les champs de jauge gauche et droit se transforment comme:

$$\begin{aligned} X_i(\vec{r}, \vec{R}, C) &= A[X_i(\vec{r}_1) + U_0(\vec{r}_1)CX_i(\vec{r}_2)C^\dagger U_0^\dagger(\vec{r}_1)]A^\dagger \\ Y_i(\vec{r}, \vec{R}, C) &= B[Y_i(\vec{r}_2) + U_0^\dagger(\vec{r}_2)C^\dagger Y_i(\vec{r}_1)CU_0(\vec{r}_2)]B^\dagger \end{aligned} \tag{6.2}$$

pour ces mêmes rotations A et B . On a utilisé les notations $\vec{r}_1 = \vec{r} + \frac{\vec{R}}{2}$ and $\vec{r}_2 = \vec{r} - \frac{\vec{R}}{2}$. Il est évident que seule la rotation relative $C = A^\dagger B = c_0 + i\vec{\tau} \cdot \vec{c}$ importe dans le système à deux solitons et l'interaction baryon-baryon comme on le verra par la suite s'écrit comme

une fonction de ce produit $C = A^\dagger B$. La transformation (6.2) des champs de jauge X_i and Y_i est conforme à leur loi de transformation à la limite locale (voir section 3). En effet, à cette limite les champs de jauge tendent vers les gradients du champ du pion: $X_i \rightarrow \frac{ig\Gamma^2}{m_A^2} \partial_i U U^\dagger = \frac{i}{2g} L_i$ et $Y_i \rightarrow \frac{ig\Gamma^2}{m_A^2} \partial_i U^\dagger U = \frac{i}{2g} R_i$, et il est facile de montrer que les courants L_i et R_i se transforment comme la loi (6.2) par une rotation de $SU(2) \otimes SU(2)$. Pour ce qui est du champ scalaire il est clair qu'il ne peut dépendre que des variables \vec{r} et \vec{R} . Une forme compatible avec l'approximation du produit pour le champ U et l'équation (3.6) est:

$$\xi(\vec{r}, \vec{R}) = \frac{\xi(\vec{r}_1)\xi(\vec{r}_2)}{\Gamma} \quad (6.3)$$

Ces formes (6.2) et (6.3) pour les champs de jauge et le champ scalaire dans le secteur $B = 2$ bien que cohérentes, ne satisfont pas aux équations du mouvement dans ce secteur. Mais pour ce qui est du champ du ω on n'a pas cette liberté, car ce champ ne se propage pas, il est simplement contraint. La composante temporelle de ce champ obéit à l'équation suivante:

$$(\partial_i \partial_i - m_\omega^2) \omega = S \quad (6.4)$$

où S est la fonction source $S = 2\beta_\omega \mathcal{J}_{I=0}^0$. $\mathcal{J}_{I=0}^0$ est le courant baryonique défini en (3.14). Il est clair que les configurations des champs U , X_i et Y_i une fois choisies celle du ω est automatiquement donnée par l'expression (6.4).

L'équation (6.4) peut être réécrite comme $\omega(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}') S(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$, avec $G(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \frac{\exp(-m_\omega |\vec{r}|)}{|\vec{r}|}$. En insérant les configurations des champs U, X_i et Y_i (6.1-6.2) dans cette expression on obtient celle du champ ω dans le secteur $B = 2$:

$$\omega(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) = \omega(\vec{r}_1) + \omega(\vec{r}_2) + \omega_T(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) \quad (6.5)$$

Les deux premiers termes du membre de droite de cette équation ont déjà été considérés dans [27] où le terme mixte ω_T avait été négligé parce qu' il est de courte portée. En fait le calcul exact des termes contenant ω_T dans l' interaction est sérieusement compliqué du point de vue numérique, la raison est la dimensionalité élevée (R^5) des intégrales qu' il faut évaluer. Néanmoins nous avons effectué les calculs numériques de ces termes pour certains points autour de 1 fm., pour s' apercevoir que pour le cas de notre modèle ces termes sont petits. Nous avons par conséquent négligé ω_T dans l' expression (6.5). Pour être complets nous donnons son expression:

$$\omega_T(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) = \beta_\omega \int d^3 r' G(\vec{r} - \vec{r}') \left\{ T_B(\vec{r}', \vec{R}, c_\mu) + T_A(\vec{r}', \vec{R}, c_\mu) \right\}$$

avec
$$T_B(\vec{r}, \vec{R}, C) = \frac{\epsilon_{ijk}}{8\pi^2} \text{Tr}(R_i^1 C L_j^2 L_k^2 C^\dagger - R_i^1 R_j^1 C L_k^2 C^\dagger) \quad (6.6)$$

et

$$\begin{aligned} T_A(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) = \frac{ig\epsilon_{ijk}}{8\pi^2} \partial_i \left\{ \text{Tr} [I_j^1 C L_k^2 C^\dagger - R_k^1 C X_j^2 C^\dagger - R_k^1 C I_j^2 C^\dagger + Y_j^1 C L_k^2 C^\dagger \right. \\ + ig(I_k^1 C I_j^2 C^\dagger + Y_j^1 C X_k^2 C^\dagger - C Y_j^2 C^\dagger X_k^1 \\ - U_1^\dagger C U_2^\dagger C^\dagger Y_j^1 C U_2 C^\dagger U_1 C X_k^2 C^\dagger - X_k^1 C U_2^\dagger C^\dagger Y_j^1 C U_2 C^\dagger \\ \left. + X_k^1 Y_j^1 - U_1^\dagger C Y_j^2 C^\dagger U_1 C X_k^2 C^\dagger + X_k^2 Y_j^2) \right\} \quad (6.7) \end{aligned}$$

Nous avons fait usage des notations compactes $I_i^1 = U^\dagger(\vec{r}_1) X_i(\vec{r}_1) U(\vec{r}_1)$, $I_i^2 = U(\vec{r}_2) Y_i(\vec{r}_2) U^\dagger(\vec{r}_2)$, $R_i^1 = \partial_i U^\dagger(\vec{r}_1) U(\vec{r}_1)$, $L_i^2 = \partial_i U(\vec{r}_2) U^\dagger(\vec{r}_2)$, $U_1 = U(\vec{r}_1)$, $U_2 = U(\vec{r}_2)$, $X_i^2 = X_i(\vec{r}_2)$, $Y_i^1 = Y_i(\vec{r}_1)$, $X_i^1 = X_i(\vec{r}_1)$, $Y_i^2 = Y_i(\vec{r}_2)$.

L' opérateur potentiel soliton-soliton est donné par l' expression:

$$V(\vec{R}, c_\mu) = - \int d^3 \vec{r} \left\{ \mathcal{L}_{B=2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, c_\mu) - 2\mathcal{L}_{B=1}(\vec{r}) \right\} \quad (6.8)$$

Pour notre modèle, il faut remplacer les configurations du secteur $B = 2$ présentées plus haut dans cette équation. Le résultat peut être écrit comme la somme de deux termes:

$$V(\vec{R}, c_\mu) = \int d^3\vec{r} \left\{ U_{\xi\rho A_1}(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) + U_\omega(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) \right\} \quad (6.9)$$

Dans cette expression la première partie est la contribution associée à $\mathcal{L}_{\pi\xi\rho A_1}$ décrivant les effets dûs aux champs $\vec{\rho}, \vec{A}_1, \xi$ et la seconde correspond à la contribution des couplages du méson ω :

$$\begin{aligned} U_{\xi\rho A_1}(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) = & \frac{1}{8} \text{Tr} \left\{ 4F_{ij}^1 [C\partial_i X_j^2 C^\dagger - C\partial_j X_i^2 C^\dagger - R_i^1 C X_j^2 C^\dagger + R_j^1 C X_i^2 C^\dagger \right. \\ & + C X_j^2 C^\dagger R_i^1 - C X_i^2 C^\dagger R_j^1 + ig(C[X_i^2, X_j^2]C^\dagger + C X_i^2 C^\dagger I_j^1 - C X_j^2 C^\dagger I_i^1 \\ & + I_i^1 C X_j^2 C^\dagger - I_j^1 C X_i^2 C^\dagger)] + 2R_i^1 C X_j^2 C^\dagger [R_i^1 C X_j^2 C^\dagger - R_j^1 C X_i^2 C^\dagger \\ & + 2ig(I_j^1 C X_i^2 C^\dagger - I_i^1 C X_j^2 C^\dagger - [I_i^1, I_j^1])] + 4R_i^1 C X_j^2 [-\partial_i X_j^2 C^\dagger \\ & + \partial_j X_i^2 C^\dagger - X_j^2 C^\dagger R_i^1 + X_i^2 C^\dagger R_j^1 + ig(X_j^2 C^\dagger I_i^1 - X_i^2 C^\dagger I_j^1 - [X_i^2, X_j^2]C^\dagger)] \\ & + 4C\partial_i X_j^2 [X_j^2 C^\dagger R_i^1 - X_i^2 C^\dagger R_j^1 + ig(X_i^2 C^\dagger I_j^1 - X_j^2 C^\dagger I_i^1 + [I_i^1, I_j^1])] \\ & + 2C X_j^2 C^\dagger R_i^1 [C X_j^2 C^\dagger R_i^1 - C X_i^2 C^\dagger R_j^1 + 2ig(C X_i^2 C^\dagger I_j^1 - C X_j^2 C^\dagger I_i^1 + [I_i^1, I_j^1])] \\ & + 4ig X_j^2 C^\dagger R_i^1 [I_i^1 C X_j^2 - I_j^1 C X_i^2 + C[X_i^2, X_j^2]] + 4ig \partial_i X_j^2 C^\dagger [I_i^1 C X_j^2 - I_j^1 C X_i^2] \\ & - 4g^2 \left[-C X_i^2 C^\dagger (I_j^1 I_j^1 I_i^1 + I_i^1 I_i^1 I_j^1 - 2I_j^1 I_i^1 I_j^1) - C^\dagger I_i^1 C (X_j^2 X_j^2 X_i^2 + X_i^2 X_i^2 X_j^2 \right. \\ & - 2X_j^2 X_i^2 X_j^2) - I_i^1 I_i^1 C X_j^2 X_j^2 C^\dagger - I_i^1 I_j^1 C X_j^2 X_i^2 C^\dagger + 2I_i^1 I_j^1 C X_i^2 X_j^2 C^\dagger \\ & \left. + \frac{1}{2} [C X_i^2 C^\dagger I_j^1 (C X_i^2 C^\dagger I_j^1 - C X_j^2 C^\dagger I_i^1) + C^\dagger I_i^1 C X_j^2 (C^\dagger I_i^1 C X_j^2 - C^\dagger I_j^1 C X_i^2)] \right] \Big\} \\ & + \left\langle F_{ij}^1 \rightarrow F_{ij}^2, C \rightarrow C^\dagger, I_i^1 \rightarrow I_i^2, X_i^2 \rightarrow Y_i^1, R_i^1 \rightarrow L_i^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{2\Gamma^2} \text{Tr} \left\{ R_i^1 C [L_i^2 + ig(X_i^2 - I_i^2)] C^\dagger + C^\dagger [Y_i^1 - I_i^1] C [igL_i^2 + g^2(I_i^2 - X_i^2)] \right\} \\
& + \left(\frac{m_\rho^2}{2} + \frac{\Delta m^2}{4} \right) \text{Tr} [I_i^2 C^\dagger Y_i^1 C + I_i^1 C X_i^2 C^\dagger] - \frac{\Delta m^2}{4} \text{Tr} [I_i^1 C I_i^2 C^\dagger + Y_i^1 C X_i^2 C^\dagger] \\
& - \frac{1}{\Gamma^2} \xi_1 \xi_2 \partial_i \xi_1 \partial_i \xi_2 - \lambda (\Gamma^2 - \xi_1^2) (\Gamma^2 - \xi_2^2) \left(2 - \frac{(\Gamma^2 - \xi_1^2)(\Gamma^2 - \xi_2^2)}{\Gamma^4} \right)
\end{aligned} \tag{6.10, suite}$$

$$\begin{aligned}
U_\omega(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) = & -\frac{\beta_\omega}{2} \left\{ \omega_1 (B_0^2 + A^2) + \omega_2 (B_0^1 + A^1) \right. \\
& + (\omega_1 + \omega_2) [T_B(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) + T_A(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu)] \\
& \left. + \omega_T(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) \left[B_0^1 + A^1 + B_0^2 + A^2 + T_B(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) + T_A(\vec{r}, \vec{R}, c_\mu) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

avec les notations

$$\begin{aligned}
F_{ij}^1 &= U^\dagger(\vec{r}_1) \partial_i X_j(\vec{r}_1) U(\vec{r}_1), F_{ij}^2 = U(\vec{r}_2) \partial_i Y_j(\vec{r}_2) U^\dagger(\vec{r}_2), B_0^1 = \frac{-\epsilon_{ijk}}{24\pi^2} \text{Tr}(L_i^1 L_j^1 L_k^1), \\
B_0^2 &= \frac{-\epsilon_{ijk}}{24\pi^2} \text{Tr}(L_i^2 L_j^2 L_k^2), A^1 = A(\vec{r}_1), A^2 = A(\vec{r}_2), \xi_1 = \xi(\vec{r}_1), \xi_2 = \xi(\vec{r}_2), \\
\omega_1 &= \omega(\vec{r}_1), \omega_2 = \omega(\vec{r}_2)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Après avoir intégré sur la variable \vec{r} , il nous reste une fonction de \vec{R} et des variables c_μ . Il n'est pas difficile de montrer que cette fonction est en fait un polynôme d'ordre pair en ces c_μ :

$$V(\vec{R}, c_\mu) = v_0(\vec{R}) + v_2(\vec{R}, c_\mu) + v_4(\vec{R}, c_\mu) + v_6(\vec{R}, c_\mu) + \dots \tag{6.13}$$

avec la forme générale pour les v_{2p} ($p = 1, 2, \dots$) :

$$\begin{aligned}
v_2(\vec{R}, c_\mu) &= \alpha_1 + \alpha_2 c_0^2 + \alpha_3 c_3^2 \\
v_4(\vec{R}, c_\mu) &= \beta_1 + \beta_2 c_0^2 + \beta_3 c_3^2 + \beta_4 c_0^4 + \beta_5 c_0^2 c_3^2 + \beta_6 c_3^4 \\
v_6(\vec{R}, c_\mu) &= \dots
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Pour arriver à ces expressions nous avons pris le vecteur \vec{R} parallèle à l'axe z de l'espace de configuration. Maintenant, les fonctions α et β peuvent être calculées en prenant différentes projections de la matrice C dans le membre de droite des équations (6.6), (6.7) et (6.10), (6.11). Pour donner un exemple, la fonction α_1 est égale au membre de droite de l'équation (6.9), dans laquelle il faut retenir seulement les termes quadratiques en c_μ et prendre $C = i\tau_1$. L'expression exacte des α_i, β_i est donnée dans l'appendice B. Les termes d'ordre supérieur à quatre dans le polynôme de l'équation (6.13) proviennent du terme de Wess-Zumino (ce terme contribue aussi à v_0, v_2 et v_4). Nous avons négligé ces termes dans notre étude car ils contribuent essentiellement à des opérateurs en représentation de spin élevé. L'approximation de négliger v_6 peut être partiellement justifiée par les résultats de la réf. [24] où il a été trouvé que le terme de Wess-Zumino a globalement un petit effet sur les observables du secteur $B = 1$.

Pour extraire maintenant les canaux physiques (de spin et isospin définis) de l'interaction, on utilise la méthode simple de projection qui a été introduite dans la réf. [18]. La décomposition naturelle de l'opérateur potentiel non-relativiste agissant dans un espace à deux nucléons est:

$$\begin{aligned}
V(\vec{R}) &= V_C^+(|\vec{R}|) + (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) V_C^-(|\vec{R}|) + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) [V_{SS}^+(|\vec{R}|) + (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) V_{SS}^-(|\vec{R}|)] \\
&\quad + [3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{R})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{R})/\vec{R}^2 - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)] [V_T^+(|\vec{R}|) + (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) V_T^-(|\vec{R}|)]
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Pour calculer les six composantes V_C^+, V_C^-, \dots dans notre modèle, il faut six équations. On les obtient en égalant six éléments de matrice de $V(\vec{R})$ (6.15) avec ceux de l'opérateur

$V(\vec{R}, c_\mu)$ (6.9), ces derniers étant exprimés en termes des fonctions d'onde de spin et d'isospin du nucléon. La solution de ce système d'équations est:

$$\begin{aligned}
V_C^+ &= \int da_\mu \int db_\mu \delta\left(\sum_{\mu=1}^4 a_\mu^2 - 1\right) \delta\left(\sum_{\mu=1}^4 b_\mu^2 - 1\right) V(\vec{R}, c_\mu) f_C^+(a_\mu, b_\mu) \\
&= v_0 + \alpha_1 + \beta_1 + \frac{1}{4}(\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3) + \frac{1}{8}(\beta_4 + \beta_6) + \frac{1}{24}\beta_5 \\
V_T^- &= \int da_\mu \int db_\mu \delta\left(\sum_{\mu=1}^4 a_\mu^2 - 1\right) \delta\left(\sum_{\mu=1}^4 b_\mu^2 - 1\right) V(\vec{R}, c_\mu) f_T^-(a_\mu, b_\mu) \\
&= \frac{1}{54}(\alpha_3 + \beta_3) + \frac{1}{432}\beta_5 + \frac{1}{72}\beta_6 \\
V_{SS}^- &= \int da_\mu \int db_\mu \delta\left(\sum_{\mu=1}^4 a_\mu^2 - 1\right) \delta\left(\sum_{\mu=1}^4 b_\mu^2 - 1\right) V(\vec{R}, c_\mu) f_{SS}^-(a_\mu, b_\mu) \\
&= \frac{1}{36}(\alpha_2 + \beta_2) - \frac{1}{108}(\alpha_3 + \beta_3) + \frac{1}{48}\beta_4 + \frac{1}{432}\beta_5 - \frac{1}{144}\beta_6 \\
V_T^+ &= V_{SS}^+ = V_C^- = 0
\end{aligned} \tag{6.16}$$

où les a_μ sont les variables du nucléon 1 et b_μ celles du nucléon 2. Dans ces formules les fonctions f_C^+, f_C^-, \dots sont des densités dans l'espace $SU(2) \otimes SU(2)$. Leurs expressions sont données par:

$$\begin{aligned}
f_C^+(a_\mu, b_\mu) &= \frac{1}{2\pi^4} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_0^2) \\
f_T^-(a_\mu, b_\mu) &= \frac{1}{6\pi^4} \left\{ (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2 - b_0^2 - b_3^2) \right. \\
&\quad \left. + (a_1 a_0 - i(a_2 a_0 + a_1 a_3) - a_2 a_3)(b_1 b_0 + i(b_2 b_0 + b_1 b_3) - b_2 b_3) \right\} \\
f_{SS}^-(a_\mu, b_\mu) &= f_T^-(a_\mu, b_\mu) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^4} (a_1 a_0 - i(a_2 a_0 + a_1 a_3) - a_2 a_3)(b_1 b_0 + i(b_2 b_0 + b_1 b_3) - b_2 b_3)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Pour les calculs numériques cependant les expressions en α_i et β_i sont d' une plus grande utilité. C' est aussi celles que nous avons utilisées pour calculer les différents canaux de l' interaction nucléon-nucléon dans notre modèle.

Il est à noter ici que les fonctions α_i, β_i peuvent être utilisées pour calculer non seulement les interactions entre nucléons mais aussi celles entre des baryons de spin plus élevé. Ceci a été fait dans [18]. Dans notre modèle le calcul de ces interactions nécessiterait l' inclusion des termes comme v_6 dans (6.13).

On va s' intéresser maintenant aux résultats, pour estimer si notre modèle basé sur une description cohérente des mésons peut reproduire les aspects caractéristiques de l' interaction nucléon-nucléon telle qu' ils sont observés expérimentalement.

7. Discussion des résultats

Nous avons calculé numériquement les différentes composantes V_C^+, V_T^-, V_{SS}^- avec les fonctions de profil $F, \alpha, \beta, \gamma, \omega, \epsilon$ obtenues dans le secteur $B = 1$ (section 5).

Tout d' abord, nous avons trouvé que la contribution du terme d' anomalie de Wess-Zumino au potentiel est très petite. Ceci est en accord avec l' observation des auteurs [24] qui ont trouvé (dans le cadre du modèle σ non-linéaire) que ce terme bien qu' important pour la bonne description de la physique des mésons est quantitativement moins important dans le secteur des baryons.

La contribution essentielle à U_ω est dûe au couplage du ω aux trois pions. On peut montrer (aussi bien analytiquement que numériquement) que si le terme de Wess-Zumino est négligé, la contribution de U_ω au potentiel V_C^+ est répulsive. Par ailleurs on a vu lors de l' étude du secteur $B = 1$ que le champ du ω dans le modèle linéaire est d' une portée inférieure à celle qu' il a si le paramètre λ est très large (modèle non-linéaire). Cet effet est à l' origine de la suppression de la portée du terme U_ω dans le canal central de l' interaction (table 1).

La répulsion due au champ du méson ω est donc de courte portée dans notre modèle. Cet effet est dû à l' inclusion simultanée de tous les mésons.

En ce qui concerne la contribution du terme $U_{\xi\rho A_1}$ à V_C^+ , on peut montrer que le premier terme de l' équation (6.10) est positif alors que les deux derniers (absents du modèle de Skyrme) sont négatifs. Il est à noter que ces deux derniers termes disparaissent dans le cas non-linéaire ($\xi \rightarrow \Gamma$). En comparant les profils linéaires à ceux du cas non-linéaire pour les fonctions F, α, β, γ (figure (1.3)), on comprend pourquoi la partie répulsive de $U_{\xi\rho A_1}$ est sérieusement diminuée dans notre modèle (table 1).

Table 1

Contribution des mésons vecteurs au canal central de l' interaction nucléon-nucléon, quand ceux-ci sont introduits en jugeant le modèle sigma non-linéaire ($\lambda = \infty$) ou le modèle sigma linéaire ($\lambda = 0.8$). R est en fermi et le potentiel est en MeV.

| R | $\rho, A_1(\lambda = \infty)$ | $\rho, A_1(\lambda = 0.8)$ | $\omega(\lambda = \infty)$ | $\omega(\lambda = 0.8)$ |
|-----|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 0.0 | 596.0 | 122.0 | 405.2 | 872.5 |
| 0.5 | 400.5 | 108.0 | 247.5 | 405.6 |
| 1.0 | 110.6 | 22.0 | 63.7 | 54.9 |
| 1.5 | 18.6 | 2.3 | 10.7 | 5.7 |
| 2.0 | 3.4 | 0.4 | 1.5 | 0.6 |

Nous montrons sur la figure (1.5) les résultats pour V_C^+ obtenus avec une masse du scalaire de 0.62 GeV. Pour comparaison, nous y avons dessiné les résultats du modèle non-linéaire, (le cas où le champ du scalaire est éliminé) et les valeurs du potentiel de Paris [37].

Notre étude a montré que quand la masse du méson isoscalaire augmente l' attraction est poussée au-delà de 1.5 fm. On peut penser que le fait d' avoir besoin d' une masse m_ϵ assez petite pour que l' attraction soit placée au bon endroit, constitue un problème car la phénoménologie veut que la résonance S de la diffusion $\pi\pi$ se situe plutôt vers 1 GeV. A ce sujet, rappelons-nous du cas des modèles d' échange de bosons, là aussi, il est nécessaire

d' introduire un champ scalaire assez léger ($m \sim 0.5$ GeV) pour reproduire correctement l' interaction nucléon-nucléon. Dans le cadre de cette description l' introduction de ce méson scalaire fictif peut être évitée en considérant explicitement l' échange de deux pions [38]. Malheureusement, il n' existe pas à l' heure actuelle une méthode qui permettrait de tenir compte de ces effets dans notre problème. D' un autre côté, comme nous le verrons plus loin, il n' est pas impossible que dans notre modèle on obtienne les forces attractives avec une masse du méson scalaire, plus proche de sa valeur expérimentale.

On a donc montré qu' une généralisation du modèle de Skyrme décrivant la physique du pion et des mésons scalaires et vecteurs est capable de reproduire l' essentiel de la physique des interactions nucléon-nucléon, à savoir une répulsion à courte portée et une attraction à moyenne portée dans le canal central de cette interaction. De l' attraction mais à longue portée a été obtenue par d' autres auteurs, toujours par le biais de l' inclusion des degrés de liberté scalaires mais dans des contextes différents (anomalie d' échelle de la QCD [29], corrections à une boucle de pions [39]). Notre modèle suggère que pour que cette attraction soit vraiment de moyenne portée (en accord avec la phénoménologie) il faut inclure non seulement le méson scalaire mais aussi les mésons vecteurs ρ, ω, A_1 dans le Lagrangien effectif. A cet égard, observons sur la figure (1.5) que même en l' absence du méson scalaire la répulsion est fortement diminuée par rapport au modèle de Skyrme.

Pour illustrer la nécessité d' inclure simultanément les mésons $\epsilon, \rho, \omega, A_1$ nous avons effectué un calcul de l' interaction NN dans le cas où seuls le pion et le scalaire sont présents dans le Lagrangien effectif. Nous avons considéré le modèle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi\xi} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{\xi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) - \lambda(\xi^2 - \Gamma^2)^2 \\ & + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2) - \frac{b}{2f_\pi^2} B_\mu B^\mu \end{aligned} \quad (7.1)$$

Le modèle (7.1) est très proche du modèle de la réf. [29] mais ici le terme d' ordre six est inclus car il n' est pas justifié de le négliger. A la limite où $\lambda \rightarrow \infty$ on retrouve le

Lagrangien (3.15) en termes de pions uniquement. Sur la figure (1.6) on voit que l'attraction n' a plus la bonne portée quand les masses des mésons ρ, ω, A_1 deviennent infinies.

Il est donc clair qu' un Lagrangien effectif de pions et de scalaires seulement ne peut fournir que de l' attraction à longue portée, confirmant ainsi notre conclusion principale.

Faisons quelques remarques maintenant sur la validité de l' approximation du produit adoptée au cours de notre étude. Dans notre travail aussi bien que dans ceux des références [29] et [39], le potentiel NN est calculé en approximant le système $B = 2$ par la configuration simple de l' équation (6.1). Récemment les auteurs de [36] ont trouvé que la répulsion du modèle de Skyrme est sensiblement diminuée si l' ansatz de Manton-Singer est utilisé dans un calcul semi-exact. D' autre part les auteurs de [20] trouvent même de l' attraction dans le modèle de Skyrme par des méthodes numériques assez compliquées mais cette attraction n' a pas la bonne portée. Ces calculs numériques utilisant des approximations allant au-delà de celle du produit ont l' air de suggérer que cette dernière n' est pas adéquate pour le calcul de l' interaction. En fait l' avantage de l' approximation du produit est qu' elle est simple et suffisamment transparente pour extraire les aspects phénoménologiques connus de l' interaction nucléon-nucléon. Comme on l' a vu auparavant, les signes des différentes contributions au potentiel sont connus et cohérents avec les ingrédients physiques du modèle (3.1). Nous pensons que les différentes approximations peuvent affecter la magnitude de ces contributions mais pas leur signe. De plus, dans tous les calculs précités, on calcule un potentiel local et seule l' approximation du produit offre une définition non ambiguë de l' interdistance entre deux solitons. Si les résultats de [20] et [36] sont corrects, ils donnent à penser que l' approximation du produit sous estime l' attraction que le Lagrangien (3.1) produit. Autrement dit si notre modèle est traité numériquement avec les méthodes des réfs. [20] ou [36], il est très probable qu' il fournisse trop d' attraction avec $m_\epsilon = 0.62$ GeV. Dans ce cas, en augmentant la valeur de m_ϵ jusqu' à la valeur expérimentale (1 GeV) on pourrait retrouver l' attraction NN empirique. Il serait en effet très intéressant d' effectuer

le traitement numérique de [20] dans le cadre de notre modèle qui, comme nous l’ avons vu dans les sections précédentes, est plus réaliste que le modèle de Skyrme.

L’ interaction dans le canal spin-spin aussi bien que celle du canal tenseur ont été aussi calculées dans le modèle linéaire et non-linéaire (figures 1.7 et 1.8). La présence du champ scalaire supprime fortement ces deux canaux. Nos résultats sont en accord qualitatif avec ceux de la réf. [29].

Une dernière remarque importante doit être faite. Un degré de liberté qui ne doit pas manquer dans les modèles des hadrons à basse énergie est celui du méson ω . Il est bien connu que sa contribution à l’ interaction NN est fortement repulsive aussi bien dans les modèles d’ échange de mésons que dans le cadre des modèles que nous considérons ici. Son absence dans les travaux [20],[29],[36],[39] est injustifiée. Dans notre travail il est bien présent, et malgré cela l’ attraction persiste. Ce phénomène est le résultat d’ un mécanisme non-trivial dû à l’ inclusion simultanée de tous les mésons.

En résumant les calculs de ce chapitre on peut dire que le modèle que nous avons étudié ici et qui généralise le modèle de Skyrme de façon à décrire correctement la physique des mésons, est non seulement capable de prédire mieux les propriétés statiques des baryons, mais aussi de produire une interaction nucléon-nucléon en accord quantitatif avec la phénoménologie. ■ Il est essentiel de garder à l’ esprit qu’ à la limite où le nombre des couleurs devient grand, QCD est équivalente à une théorie effective d’ un nombre infini de mésons[†]. Par conséquent il n’ y a aucune raison de considérer le pion seulement.

La prise en compte des mésons les plus légers dans le Lagrangien effectif est en fait plus qu’ une façon de tester le développement semi-classique des observables baryoniques comme il a été suggéré par Witten [21]. Le Lagrangien (3.1) que nous avons proposé dans ce chapitre offre surtout un cadre théorique simple et cohérent où les mésons (les champs élémentaires) et les baryons (leurs excitations de type soliton topologique) sont décrits simultanément.

[†] ceci pour conserver la propriété de liberté asymptotique des fonctions à deux points

Appendice A

On donne ici l' expression des équations différentielles non-linéaires couplées, dont la solution extrémise la fonctionnelle d' énergie dans le secteur B=1 (section 5 du texte). Pour simplifier quelque peu les formules, il est utile de définir les différents “moments” u , v et t qui sont associés aux champs F , α et γ respectivement:

$$\begin{aligned} u &= \xi^2 r^2 (\dot{F} + 2g\beta) \\ v &= \dot{\alpha}r + \alpha - \beta(1 - 2g\gamma r) \\ t &= \dot{\gamma}r + \gamma - 2g\alpha\beta r \end{aligned} \tag{A.1}$$

Alors les équations du mouvement sont de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \xi^2 [\sin 2F[(1 - 2g\gamma r)^2 - 4g^2\alpha^2 r^2] + 4g\alpha r \cos 2F(1 - 2g\gamma r)] \\ &\quad - 2\Delta m^2 r^2 [2\alpha\gamma \cos 2F + (\alpha^2 - \gamma^2) \sin 2F] + \beta_\omega \frac{\dot{\omega}}{2\pi^2} [-2g[\gamma r + gr^2(\alpha^2 - \gamma^2)] \cos 2F \\ &\quad - 2g\alpha r(1 - 2g\gamma r) \sin 2F - \sin^2 F] \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 4g\alpha r [g(\alpha^2 + \gamma^2) - \frac{\gamma}{r}] - 2g\beta t + g\xi^2 \cos F [\sin F + 2gr(\alpha \cos F - \gamma \sin F)] \\ &\quad + m_\rho^2 \alpha r - \Delta m^2 r \cos F (\gamma \sin F - \alpha \cos F) - \beta_\omega g \frac{\dot{\omega}}{4\pi^2} [\sin^2 F(1 - 2g\gamma r) + g\alpha r \sin 2F] \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{t} &= -2(1 - 2g\gamma r) [g(\alpha^2 + \gamma^2) - \frac{\gamma}{r}] + 2g\beta v - g\xi^2 \sin F [\sin F + 2gr(\alpha \cos F - \gamma \sin F)] \\ &\quad + m_\rho^2 \gamma r + \Delta m^2 r \sin F (\gamma \sin F - \alpha \cos F) - \beta_\omega g \frac{\dot{\omega}}{8\pi^2} [\sin 2F(1 - 2g\gamma r) - 4g\alpha r \sin^2 F] \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\omega} = m_\omega^2 \omega - 2 \frac{\dot{\omega}}{r} - \frac{\beta_\omega}{2\pi^2 r^2} \Big\{ & \dot{F} [\sin^2 F + 2g\alpha r \sin 2F(1 - 2g\gamma r) \\ & + 2g\gamma r \cos 2F + 2g^2 r^2 (\alpha^2 - \gamma^2) \cos 2F] + g[2(\dot{\alpha}r + \alpha)(\sin^2 F(1 - 2g\gamma r) \\ & + g\alpha r \sin 2F) + (\dot{\gamma}r + \gamma)(\sin 2F(1 - 2g\gamma r) - 4g\alpha r \sin^2 F)] \Big\}\end{aligned}\quad (A.5)$$

$$\ddot{\xi} = -2 \frac{\dot{\xi}}{r} + \xi \left[(\dot{F} + 2g\beta)^2 + 2 \left(\frac{\sin F}{r} + 2g(\alpha \cos F - \gamma \sin F) \right)^2 \right] + 4\lambda \xi (\xi^2 - \Gamma^2) \quad (A.6)$$

La fonction β obéit à la contrainte suivante:

$$\beta = \frac{1}{r^2(m_\rho^2 + \Delta m^2)} \left[-gu + 4g\alpha r t + 2v(1 - 2g\gamma r) \right] \quad (A.7)$$

Appendice B

Dans cet appendice on explicite les fonctions α et β qui apparaissent dans le texte (équation (6.14)). Pour les calculer il faut d'abord séparer les termes quadratiques (v_2) des termes quartiques (v_4) en la matrice C dans les expressions du potentiel, et ensuite prendre différentes projections de cette dernière. On a bien pris le soin d'écrire ces formules sous leur forme la plus générale, car elles sont indépendantes du modèle considéré.

I) Termes quadratiques

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= v_2(i\tau_1) \\ \alpha_2 &= v_2(I) - v_2(i\tau_1) \\ \alpha_3 &= v_2(i\tau_3) - v_2(i\tau_1)\end{aligned}\quad (B.1)$$

II) Termes quartiques

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= v_4(i\tau_1) \\
\beta_2 &= 4v_4((I + i\tau_1)/\sqrt{2}) - 3v_4(i\tau_1) - v_4(I) \\
\beta_3 &= -\frac{1}{4}[v_4(i\tau_3) - 25v_4(i(2\tau_1 + i\tau_3)/\sqrt{5})] - 6v_4(i\tau_1) \\
\beta_4 &= 2[v_4(I) + v_4(i\tau_1)] - 4v_4((I + i\tau_1)/\sqrt{2}) \\
\beta_5 &= 4v_4((I + i\tau_3)/\sqrt{2}) + 7v_4(i\tau_1) - 4v_4((I + i\tau_1)/\sqrt{2}) - \frac{3}{4}v_4(i\tau_3) \\
&\quad - \frac{25}{4}v_4(i(2\tau_1 + i\tau_3)/\sqrt{5}) \\
\beta_6 &= 5v_4(i\tau_1) + \frac{5}{4}v_4(i\tau_3) - \frac{25}{4}v_4(i(2\tau_1 + i\tau_3)/\sqrt{5})
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Appendice C

Dans cet appendice nous allons montrer qu'à la limite des grandes masses pour les mésons $\rho, \omega, A_1, \epsilon$ le Lagrangien (3.1) tend vers l'expression donnée par l'équation (3.15). Nous allons négliger dans ce qui suit le terme de Wess-Zumino.

Tout d'abord il est clair que quand la masse du méson scalaire tend vers l'infini ($\lambda = \infty$) le champ scalaire ϵ disparaît car à cette limite $\xi = \Gamma$. La solution de l'équation du mouvement du champ ω_μ quand les paramètres m_ω, β_ω tendent vers l'infini (en gardant le rapport β_ω/m_ω fixe) est $\omega_\mu = -\frac{\beta_\omega}{m_\omega^2}B_\mu$, ce qui implique que le Lagrangien du système $\pi\omega$ tend vers l'expression $-\frac{\beta_\omega^2}{2m_\omega^2}B_\mu B^\mu$ (équation (3.15)).

En ce qui concerne les champs de jauge, l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ gauche s'écrit:

$$-\frac{1}{2}ig\Gamma^2 L_\mu + \frac{1}{2}(m_\rho^2 + \frac{\Delta m^2}{2} + g^2\Gamma^2)X_\mu - \frac{1}{2}(g^2\Gamma^2 + \frac{\Delta m^2}{2})UY_\mu U^\dagger = \partial^\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\pi\xi\rho A_1}}{\partial(\partial^\nu X^\mu)} \right] \tag{C.1}$$

L' équation du mouvement pour le champ droit est obtenue en remplaçant dans (C.1) X_μ par Y_μ et U par U^\dagger . Faisons tendre les masses des mésons physiques ρ et A_1 vers l' infini. A cette fin il faut prendre les limites $m_\rho \rightarrow \infty$, $\Delta m^2 \rightarrow -\infty$ en respectant la relation $m_\rho^2 + \Delta m^2 = 2g^2 f_\pi^2$ pour que le dénominateur de l' équation (4.2) s' annule. Alors le coefficient Γ , proportionnel à m_{A_1} , devient très grand. Nous pouvons alors négliger les termes figurant dans le membre de droite de l' équation (C.1). La solution de cette équation à cette limite et pour g fini est:

$$\begin{aligned} X^\mu &\rightarrow \frac{ig\Gamma^2}{m_A^2} \partial^\mu U U^\dagger = \frac{i}{2g} L^\mu \\ Y^\mu &\rightarrow \frac{ig\Gamma^2}{m_A^2} \partial^\mu U^\dagger U = \frac{i}{2g} R^\mu \end{aligned} \tag{C.2}$$

donnant pour les tenseurs $X_{\mu\nu}$ et $Y_{\mu\nu}$ les identités suivantes:

$$\begin{aligned} X^{\mu\nu} &\rightarrow \frac{i}{2g} \left(1 - \frac{g^2 \Gamma^2}{m_A^2}\right) [L^\mu, L^\nu] = \frac{i}{2g} \frac{1}{2} [L^\mu, L^\nu] \\ Y^{\mu\nu} &\rightarrow \frac{i}{2g} \left(1 - \frac{g^2 \Gamma^2}{m_A^2}\right) [R^\mu, R^\nu] = \frac{i}{2g} \frac{1}{2} [R^\mu, R^\nu] \end{aligned} \tag{C.3}$$

En remplaçant les expressions (C.2) et (C.3) dans le Lagrangien (3.2) nous obtenons le modèle *sigma* non-linéaire plus un terme d' ordre quatre, antisymétrique par rapport aux dérivées du champ du pion. La constante de Skyrme correspondante est donnée par $e = \sqrt{2}g$, ce qui donne le facteur $\frac{1}{64g^2}$ figurant dans l' équation (3.15).

Chapitre II

Sur le développement semi-classique
de la masse du soliton

Les solutions solitoniques du type considéré dans le chapitre précédent, étudiées d’abord par Skyrme puis reprises par la réf. [17] et les travaux ultérieurs sont des solutions classiques de théories de champs non-linéaires. Leur quantification consiste à construire des états quantiques autour de ces solutions. Les observables physiques se développent alors en puissances de \hbar [10]. Pour le cas du nucléon, il a été montré [12] que le paramètre de développement semi-classique est en fait $\frac{\hbar}{N_c}$, de sorte que sa masse se met sous la forme:

$$M_N = N_c \left[\mathcal{M}_0 + \frac{\hbar}{N_c} \mathcal{M}_1 + \frac{\hbar^2}{N_c^2} \mathcal{M}_2 + \dots \right] \quad (I.1)$$

La convergence de ce développement repose fortement sur les valeurs des coefficients $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ qui sont dépendants du modèle.

Le but de ce chapitre est d’illustrer cette dépendance pour les différents modèles basés sur les Lagrangiens de mésons. Nous allons montrer que certains d’entre eux ont plus de chances que d’autres de fournir un développement (I.1) bien défini. Nous allons, dans ce qui va suivre nous intéresser à la première correction quantique à la masse du soliton, le terme \mathcal{M}_1 . Nous allons établir que le terme \mathcal{M}_1 est une énergie de Casimir [40], et donner son expression. Cette énergie possède une divergence ultraviolette qui peut être régularisée dans le schéma de la fonction zéta. Nous calculons numériquement le rapport $\frac{\mathcal{M}_1}{N_c \mathcal{M}_0}$ pour le modèle de Skyrme et une de ses généralisations possibles. Les résultats obtenus apportent quelques conclusions sur la validité du développement semi-classique pour la masse du nucléon.

1. L’ énergie de Casimir du soliton

En effectuant des fluctuations quantiques sur des degrés de liberté collectifs autour de la solution du modèle de Skyrme, les auteurs de [17] ont obtenu une partie des contributions à \mathcal{M}_2 (éq. (I.1)). Mais curieusement le terme \mathcal{M}_1 n’ a reçu que très peu d’ attention dans

le passé. Ce terme est certainement plus difficile à évaluer car il met en jeu des fluctuations non-collectives. Afin de trouver son expression, effectuons des fluctuations autour de la solution classique U_0 définies par les paramètres $\vec{\alpha}$:

$$U = U_0 \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}) \quad (1.1)$$

et considérons la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green en l'absence de sources:

$$W_E = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_E(U)} \quad (1.2)$$

S_E étant l'action euclidienne associée au Lagrangien du modèle considéré et \mathcal{N} une constante de normalisation. Cette action peut être développée autour de la configuration classique U_0 qui est un point stationnaire de S_E :

$$S_E(U) = S_E(U_0) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_E}{\delta U_0^2} (\delta U)^2 + \dots \quad (1.3)$$

La deuxième variation de l'action est un opérateur qui dépend de la solution classique:

$$\left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta U_0^2} \right)_{ab} = -\partial_\mu \partial_\mu \delta_{ab} + V_{ab}(U_0) \quad (1.4)$$

Dans ce qui va suivre, seule la contribution du modèle sigma non-linéaire à l'opérateur potentiel V_{ab} va être prise en compte: $V_{ab}(U_0) = i\epsilon_{abc} \text{Tr}(\tau_c U_0^\dagger \partial_\mu U_0) \partial_\mu$. Nous allons justifier par la suite cette approximation.

W_E peut être évaluée dans l'approximation de la phase stationnaire. Cette méthode consiste à intégrer les fluctuations de S_E qui sont quadratiques en $\vec{\alpha}$:

$$W_E = \mathcal{N} e^{-S_E(U_0)} \int \mathcal{D}[\vec{\alpha}] \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_a \left(\frac{\delta^2 S_E}{\delta U_0^2} \right)_{ab} \alpha_b\right) \quad (1.5)$$

L' intégrale Gaussienne peut être effectuée exactement [41]:

$$W_E = \tilde{\mathcal{N}} e^{-S_E(U_0)} [\det '(-\nabla_\mu^2 \delta_{ab} + V_{ab}(U_0))]^{-1/2} \quad (1.6)$$

Dans cette expression, le prime sur le déterminant indique que les valeurs propres nulles de l' opérateur $(\frac{\delta^2 S_E}{\delta U_0^2})_{ab}$ sont omises [44]. Pour extraire de cette formule \mathcal{M}_1 , il suffit d' écrire l' expression de W_E sous la forme $W_E = \exp(-MT)$, où M est la masse du soliton et T est un facteur de temps Euclidien. Après avoir effectué la soustraction de l' énergie des fluctuations du vide, l' énergie de Casimir du soliton s' écrit:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2T} \left\{ \text{Tr}' \log(-\nabla_\mu^2 \delta_{ab} + V_{ab}) - \text{Tr} \log(-\nabla_\mu^2 \delta_{ab}) \right\} = -\frac{1}{T} [S_{eff}(U_0) - S_{eff}(0)] \quad (1.7)$$

Sous cette forme, on comprend pourquoi \mathcal{M}_1 est une énergie de Casimir. Il s' agit de la différence entre l' énergie des fluctuations du vide avec et sans la présence de la solution classique. En remettant les facteurs \hbar à leur place, il n' est pas difficile de voir qu' il s' agit de la première correction quantique à la masse. Mais il est aussi manifeste sur l' expression (1.7) que cette énergie possède une divergence ultraviolette à laquelle il faudra prêter attention. En effet, l' action effective S_{eff} se développe en théorie des perturbations comme une somme sur les diagrammes à une boucle engendrés par le potentiel d' interaction $V(U_0)$ [42]. Comme le Lagrangien de base est non-renormalisable, on peut s' attendre à des problèmes dans le calcul du $\text{Tr} \log$ de l' équation (1.7).

En fait nous n' aurons besoin que d' un nombre fini de contretermes pour régulariser l' énergie de Casimir. Par exemple si V est obtenu en effectuant des fluctuations autour de la solution classique du Lagrangien du modèle σ non-linéaire, alors toutes les fonctions de Green à une boucle peuvent être rendues finies par des contretermes d' ordre quatre qui sont connus [43].

Nous allons maintenant simplifier l' équation (1.7) en tenant compte du fait que le potentiel V ne dépend pas du temps Euclidien. Réécrivons la différence des Tr log sous la forme [45]:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\tau \tau^{-1} \text{Tr}(e^{\tau \partial_0^2}) \text{Tr}(e^{-\Omega_0 \tau} - e^{-\Omega \tau}) \quad (1.8)$$

avec les opérateurs tridimensionnels $\Omega = -\nabla_i^2 \delta_{ab} + V_{ab}$ et $\Omega_0 = -\nabla_i^2 \delta_{ab}$. Sur la première trace de cette équation on reconnaît la fonction de partition de la particule libre à une dimension: $\text{Tr}(e^{\tau \partial_0^2}) = \frac{T}{\sqrt{2\pi\tau}}$. L' intégration sur τ donne l' expression connue [42] de l' énergie de Casimir :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\Omega^{1/2} - \Omega_0^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_n \omega_n - \sum_n \omega_n^0 \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

où ω_n^2 et $(\omega_n^0)^2$ représentent les valeurs propres des opérateurs Ω et Ω_0 respectivement. Notre estimation de \mathcal{M}_1 sera basée sur cette expression.

Mis à part la divergence de la somme sur les modes qui est une particularité de la théorie quantique des champs, l' équation (1.9) est tout à fait naturelle. En effet, rappelons nous du cas d' une particule non-relativiste évoluant dans un puits de potentiel unidimensionnel \tilde{V} possédant un minimum en x_0 :

$$\tilde{V}(x) = \tilde{V}(x_0) + \frac{1}{2} \omega^2 (x - x_0)^2 + \lambda (x - x_0)^4 \quad (1.10)$$

Classiquement, la trajectoire dans l' espace des phases minimisant l' énergie est celle pour laquelle la particule reste immobile ($\dot{x} = 0$) en x_0 . Son énergie classique est $M_{cl} = \tilde{V}(x_0)$.

Si le couplage est faible (si λ est petit et positif) le premier état quantique a une énergie $M = \tilde{V}(x_0) + \frac{1}{2} \hbar \omega$. En d' autres termes M est la somme de

a) l' énergie d' une solution indépendante du temps des équations du mouvement classique et

b) d' une correction quantique proportionnelle à ω , la racine carée de la dérivée seconde du potentiel prise au point stationnaire $x = x_0$.

L' analogue du terme a) en théorie des champs est la masse classique du soliton (le terme $N_c \mathcal{M}_0$) et l' analogue de la correction b) (avec la dérivée seconde remplacée par une dérivée fonctionnelle) est l' énergie de Casimir du soliton, le terme \mathcal{M}_1 . La différence en théorie quantique des champs est que pour obtenir la première correction quantique il faut sommer sur une infinité de modes et aussi soustraire l' énergie de vide. En particulier l' énergie de Casimir peut être négative.

En pratique, le calcul de la trace dans l' équation (1.9) se fait plus facilement en se plaçant dans un volume fini (mais grand) dans l' espace. Le spectre des opérateurs Ω, Ω_0 devient alors discret. Le passage à la limite continue se fait en multipliant les valeurs propres ω_n associées au vecteur d' onde k_n par la densité des niveaux. On obtient alors l' expression [46]:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dE E \frac{d\delta(E)}{dE} \quad (1.11)$$

où $\delta(E)$ est le déphasage associé au potentiel V_{ab} pour l' énergie propre E . Comme V est à symétrie sphérique, les fonctions propres se développent sur une base d' harmoniques sphériques vectorielles indicées par j , avec $j = \hat{l} + \hat{1}$, où \hat{l} est le moment angulaire spatial. Alors le déphasage s' écrit:

$$\delta(E) = \sum_j^\infty (2j+1) \delta_j(E) \quad (1.12)$$

Le calcul de l' énergie de Casimir consiste donc à évaluer les déphasages associés au potentiel V de l' opérateur tridimensionnel $\Omega = -\nabla^2 \delta_{ab} + V_{ab}$. L' expression de V en fonction de la solution classique F est:

$$V_{ab} = 2 \epsilon_{abc} \left\{ -\frac{\sin 2F}{2r} (\delta_{ci} - \hat{r}_c \hat{r}_i) - \frac{dF}{dr} \hat{r}_c \hat{r}_i + \frac{\sin^2 F}{r} \epsilon_{cim} \hat{r}_m \right\} \nabla_i \quad (1.13)$$

Nous allons nous concentrer maintenant au calcul des déphasages associés à l'opérateur Ω et à leur régularisation.

2. Calcul des déphasages.

Traitement des divergences ultraviolettes

Les propriétés de transformation par des rotations d'espace de la solution classique permettent d'écrire les fonctions propres de l'opérateur perturbé Ω comme une somme sur les ondes partielles j :

$$\vec{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j(r)\vec{Y}_{jj-1} + v_j(r)\vec{Y}_{jj} + w_j(r)\vec{Y}_{jj+1}) \quad (2.1)$$

Les fonctions \vec{Y} sont les harmoniques sphériques vectorielles. L'équation aux valeurs propres $\Omega \vec{\alpha} = E^2 \vec{\alpha}$ se décompose, pour chaque valeur de j , en trois équations radiales sur les composantes u_j, v_j, w_j :

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 u_j &= \left(\frac{j(j-1)}{r^2} - E^2 + (j-1) \frac{2 \sin^2 F}{r^2} \right) u_j + C_j \left(-(j+1) \frac{\sin 2F}{r^2} v_j - 2 \frac{dF}{dr} \dot{v}_j \right) \\ \nabla_r^2 v_j &= \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - E^2 - \frac{2 \sin^2 F}{r^2} \right) v_j + C_j \left(-(j-1) \frac{\sin 2F}{r^2} u_j + 2 \frac{dF}{dr} \dot{u}_j \right) \\ &\quad + S_j \left(-(j+2) \frac{\sin 2F}{r^2} w_j - 2 \frac{dF}{dr} \dot{w}_j \right) \\ \nabla_r^2 w_j &= \left(\frac{(j+1)(j+2)}{r^2} - E^2 - (j+2) \frac{2 \sin^2 F}{r^2} \right) w_j + S_j \left(-j \frac{\sin 2F}{r^2} v_j + 2 \frac{dF}{dr} \dot{v}_j \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $C_j = \sqrt{(j+1)/(2j+1)}$, $S_j = \sqrt{j/(2j+1)}$.

Le comportement asymptotique de la solution (u_j, v_j, w_j) de ces équations aux valeurs propres donne le déphasage dû au potentiel V dans l'équation de Schrodinger. En effectuant la somme des trois déphasages associés aux trois équations (2.2) on obtient le déphasage total $\delta_j(E)$ pour l'onde partielle j , avec le facteur de dégénérescence $(2j+1)$.

Nous avons montré dans la réf. [47] que les fonctions δ_j pour $j = 1, 2, 3 \dots$ se comportent à haute énergie comme $1/E$ ce qui veut dire que même avant de sommer sur toutes les ondes partielles, l' intégrale en (1.11) diverge logarithmiquement à grand E . L' introduction d' un schéma de régularisation de façon à ce que l' intégrale (1.11) soit définie s' impose. Elle s' impose d' autant plus que la sommation sur les ondes partielles donne naissance à une divergence encore plus violente de sorte que le comportement à grand moment p de la phase totale est:

$$\delta(p) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \delta_j(p) \approx a_1 p + \frac{a_2}{p} + \dots \quad (2.3)$$

Les coefficients a_1, a_2 peuvent être reliés au développement du noyau de la chaleur de l' opérateur Ω [48]. Notre méthode de régularisation consiste à calculer non pas la somme divergente $\sum_n (\omega_n^2)^{\frac{1}{2}}$, mais plutôt la somme $\sum_n (\omega_n^2)^{\frac{1}{2}-s}$ où s est une variable complexe. Cette fonction est bien définie sur le plan complexe. En termes de déphasages

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\Omega^{\frac{1}{2}-s} - \text{Tr} \Omega_0^{\frac{1}{2}-s}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dp (p^2 + M^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{d\delta(p)}{dp} \quad (2.4)$$

où l' on a introduit une masse M comme régulateur infrarouge. L' énergie de Casimir est égale à cette expression à la limite où $s \rightarrow 0$. Pour extraire la partie finie de cette énergie, il sera pratique d' utiliser une méthode susceptible de régulariser aussi les fonctions de Green à une boucle qui sont à l' origine du comportement (2.3). Ces fonctions sont engendrées par l' action effective (1.7) qui est égale à $\frac{1}{2} \frac{d\zeta_O}{ds}(s=0)$. Dans cette expression ζ_O est la fonction zéta [49] associée à l' opérateur $O = -\partial_0^2 + \Omega + M^2$:

$$\zeta_O(s) = \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \text{Tr} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} \exp(-\tau O) \quad (2.5)$$

où on a introduit une échelle μ . En fonction des déphasages la fonction ζ s' écrit:

$$\zeta_O(s) = \frac{T}{2\pi} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(s)} \mu^{2s} \int_0^{\infty} dp (p^2 + M^2)^{\frac{1}{2}-s} \frac{d\delta(p)}{dp} \quad (2.6)$$

L' astuce consiste maintenant à soustraire et rajouter le comportement asymptotique (2.3) dans l' expression des déphasages, tout en introduisant un régulateur infrarouge M^2 :

$$\delta(p) = (\delta(p) - a_1 p - \frac{a_2}{\sqrt{p^2 + M^2}}) + a_1 p + \frac{a_2}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

En remplaçant cette forme dans l' expression de la fonction ζ , l' énergie de Casimir s' écrit comme la somme d' une intégrale finie sur les phases et d' un terme dépendant de l' échelle μ . Cette dépendance est explicitement calculée en utilisant des fonctions béta [45]. Nous obtenons l' expression:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(\mu) = -\frac{1}{2T} \frac{d\zeta_O}{ds}(s=0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty dp \sqrt{p^2 + M^2} \left[\frac{d\delta(p)}{dp} - a_1 + \frac{a_2}{p^2 + M^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} a_1 M^2 (1 + \log \frac{\mu^2}{M^2}) - \frac{1}{2} a_2 (2 + \log \frac{\mu^2}{M^2}) - M \delta(0) \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cette dernière intégrale sur les déphasages est finie. La divergence est implicitement contenue dans la dépendance en μ de l' expression (2.7). On utilise ensuite l' identité [45] $\int_0^\infty dp \{ (p^2 + M^2)^{-1/2} - (p^2 + \mu^2)^{-1/2} \} = \frac{1}{2} \log \frac{\mu^2}{M^2}$. Nous intégrons par parties la somme sur les déphasages, pour finalement prendre la limite $M \rightarrow 0$ et arriver à l' expression simple et finie de $\mathcal{M}_1(\mu)$:

$$\mathcal{M}_1(\mu) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp \left(\delta(p) - a_1 p - \frac{a_2}{\sqrt{p^2 + \mu^2}} \right) \quad (2.8)$$

A cette expression il faut ajouter maintenant les contretermes. Leur rôle est précisément de faire disparaître la dépendance par rapport à l' échelle de l' énergie de Casimir. Les contretermes d' ordre chirale quatre régularisant les diagrammes à une boucle engendrés par l' opérateur O , ont été déterminés dans la réf. [43]. On ajoute leur contribution à l' expression de la correction quantique à la masse du soliton. Il vient,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\mu) - \left\{ \frac{1}{32\pi^2} (\bar{l}_1 - 1 + \log \frac{m_\pi^2}{\mu^2}) - \frac{3}{4e^2} \right\} \int d^3x \frac{1}{3} (\vec{L}_\mu \cdot \vec{L}_\mu)^2 \\ - \left\{ \frac{1}{32\pi^2} (\bar{l}_2 - 1 + \log \frac{m_\pi^2}{\mu^2}) + \frac{3}{8e^2} \right\} \int d^3x \frac{2}{3} (\vec{L}_\mu \cdot \vec{L}_\nu)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $\vec{L}_\mu = (1/2i)\text{Tr}(\vec{\tau}U_0^\dagger\partial_\mu U_0)$, U_0 étant la solution classique dans le secteur à charge baryonique unité. Les paramètres \bar{l}_1, \bar{l}_2 contiennent la partie finie et physiquement observable des contretermes d'ordre chiral quatre. Leurs valeurs numériques ont été déterminées dans la réf. [50]:

$$\bar{l}_1 = -0.97 \pm 1.22, \quad \bar{l}_2 = 5.77 \pm 0.72$$

C' est l' expression (2.9) que nous avons utilisé pour les résultats numériques. Il faut préciser ici que cette expression de \mathcal{M}_1 n' est pas totalement indépendante de l' échelle μ parce que nous avons tronqué l' opérateur V de façon à ne garder que la contribution de la fluctuation autour de \mathcal{L}_2 . En effet, on peut montrer que le coefficient asymptotique a_2 associé au potentiel V tronqué, est égal à un facteur multiplicatif près à:

$$a_2 = T \int d^3x \left\{ \frac{1}{3}(\vec{L}_\mu \cdot \vec{L}_\mu)^2 + \frac{2}{3}(\vec{L}_\mu \cdot \vec{L}_\nu)^2 - (\partial_\mu \vec{L}_\mu)^2 \right\} \quad (2.10)$$

La dépendance en μ des deux premiers termes va être absorbée par les contretermes d'ordre quatre de l' équation (2.9). Par contre, pour faire disparaître la dépendance en μ provenant du terme en $(\partial_\mu \vec{L}_\mu)^2$ il faudrait inclure des contretermes d'ordre supérieur à quatre. Il est clair qu' en raison de l' équation du mouvement classique du modèle de Skyrme:

$$\partial_\mu L_\mu^k = \frac{1}{(ef_\pi)^2} \partial_\mu [L_\mu^k (\vec{L}_\nu \cdot \vec{L}_\nu) - L_\nu^k (\vec{L}_\mu \cdot \vec{L}_\nu)], \quad (2.11)$$

la quantité $(\partial_\mu \vec{L}_\mu)^2$ est d'ordre chiral huit. L' énergie de Casimir sera complètement indépendante de l' échelle μ si on y ajoute les contretermes correspondants . Nous n' allons pas effectuer cette dernière soustraction ici, la partie finie (et donc physique) de ces contretermes n' étant pas connue à l' heure actuelle. Nous justifierons par la suite cette approximation.

En l' absence du terme de Skyrme (sa contribution à l' équation du mouvement figure dans le membre de droite de l' équation (2.11)), la quantité $\partial_\mu L_\mu$ est identiquement nulle, et l'

énergie de Casimir peut-être rendue complètement indépendante de l' échelle. Mais dans ce cas il n' y a pas de solution classique de type soliton.

Nous allons maintenant présenter les résultats pour la première correction à la masse du soliton. Nous calculerons \mathcal{M}_1 dans deux cas: celui du modèle de Skyrme et celui où l' on ajoute à ce dernier un terme d' ordre six.

3. Résultats

Les phases de l' opérateur Ω ont été calculées dans la réf. [47]. Elles ont été calculées pour les solutions classiques

I) du modèle de Skyrme: $\mathcal{L}_{SK} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2)$

II) du modèle où l' on inclut le terme d' ordre six déjà rencontré lors du chapitre précédent:

$$\mathcal{L}_{2+4+6} = \mathcal{L}_{SK} - \frac{b}{2f_\pi^2} \left[\frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \text{Tr}(\partial^\nu U U^\dagger \partial^\alpha U U^\dagger \partial^\beta U U^\dagger) \right]^2$$

Nous avons trouvé que les ondes partielles (à l' exception de l' onde $j = 1$) ont un déphasage nul à $p = 0$, et que pour j grand les phases s' “aplatissent” à petit p . Le fait le plus important pour l' énergie de Casimir est que le déphasage pour l' onde $j = 1$ soit égal à 2π pour $p = 0$. Ce comportement n' est pas dû à la présence de vrais états liés de l' opérateur Ω , mais à la présence de deux “modes zéro” i.e. deux fonctions propres à énergie nulle. Leur existence traduit l' invariance de l' énergie $\mathcal{M}_0[U_0]$ par des transformations continues de la solution classique U_0 . Il existent quatre telles opérations continues et deux d' entre elles donnent naissance à des modes propres normalisables. Chacun contribue d' un facteur π au déphasage à l' origine de sorte que l' on ait: $\delta_{j=1}(p = 0) = 2\pi$. Ce résultat est fortuit car à priori l' opérateur tronqué V_{ab} n' a pas les mêmes modes zéro que l' opérateur complet. Cette circonstance justifie partiellement notre approximation de négliger les contributions à l' opérateur de fluctuation V , provenant du terme de Skyrme.

En effectuant la somme sur j des déphasages δ_j (équation (1.12)), nous obtenons la fonction de phase totale $\delta(p)$. Nous avons vérifié que pour des valeurs de p grandes (en pratique $p >$

5μ) le comportement de la solution numérique $\delta(p)$ est conforme aux prédictions analytiques (équation (2.3)). L' intégrand de l' équation (2.8) est montré sur la figure (2.1).

Observons que les courbes partent d' une valeur proche de 6π et qu' elles deviennent pratiquement nulles vers $p \approx 0.5 - 0.7$ GeV. Ceci veut dire que ce sont les fluctuations à basse énergie qui dominent l' énergie de Casimir. Ce résultat est très important car il justifie en quelque sorte la validité d' un Lagrangien effectif tronqué à un ordre chirale donné. Il est clair que l' énergie de Casimir du soliton est contrôlée par les propriétés d' invariance de la solution classique et par son extension spatiale.

Est-ce que les déphasages vont changer si l' on inclut dans l' opérateur V_{ab} les fluctuations provenant du terme de Skyrme et du terme d' ordre six qui ont été négligées dans notre travail? La réponse est qu' ils vont différer sensiblement mais seulement à haute énergie. Les phases de l' opérateur complet du modèle de Skyrme ont été calculées il y a assez longtemps par les auteurs de la réf. [51]. A première vue ces phases ne ressemblent en rien aux nôtres. En particulier, elles divergent linéairement en p . Ceci veut dire que la phase totale de l' opérateur complet possède une divergence cubique: $\delta(p) \approx a_0 p^3 + \dots$, mais d' après ce que nous venons de voir, elle n' intervient pas dans l' énergie de Casimir, car elle est essentiellement soustraite de l' expression à intégrer (2.8). C' est le comportement à basse énergie qui domine \mathcal{M}_1 et on s' aperçoit que dans la région des petits p les phases trouvées dans [51] sont qualitativement proches des nôtres. On espère aussi que la valeur à l' origine de la phase totale $\delta(0) = 6\pi - \frac{a_2}{\mu}$ ne va pas être très modifiée pour le cas de l' opérateur complet V_{ab} . Les résultats de la réf. [52] indiquent que dans ce cas le coefficient a_2 pour le modèle de Skyrme ne serait pas très différent du nôtre, de sorte que la relation $\delta(0) \approx 6\pi$ ait un caractère général.

Pour le modèle de Skyrme nous avons trouvé pour la première correction quantique à la masse du soliton: $(\mathcal{M}_1)_{SK} = -1.169 + (-0.070) \text{ GeV}$ (3.1)

Entre parenthèses figure la contribution du contreterme. Comme nous l’ avons annoncé, c’ est l’ intégrale sur les déphasages qui domine le résultat, la contribution du contreterme est de $\approx 6\%$. On s’ attend à ce que les contretermes (inconnus) d’ ordre supérieur à quatre soient encore plus petits. Même si le résultat (3.1) n’ est pas complètement indépendant de l’ échelle μ choisie, nous pensons qu’ il constitue une bonne approximation de l’ énergie de Casimir du soliton pour des échelles typiques des masses des hadrons. Nous avons étudié la variation du résultat en fonction de l’ échelle, et nous avons trouvé que si au lieu de $\mu = m_\rho$ on prend $\mu = 2m_\rho$ par exemple, \mathcal{M}_1 change à peu près de 10% ce qui semble raisonnablement petit.

Pour ce qui est de la valeur de \mathcal{M}_1 remarquons d’ abord que son signe est négatif. Ce signe est en accord avec les réfs. [53-54]. Par contre la valeur de \mathcal{M}_1 est quatre à cinq fois plus grande que celle trouvée dans ces travaux. La raison physique de ce désaccord est très simple; les calculs [53-54] sont basés sur une approximation de Born des déphasages ignorant l’ existence d’ états propres non-perturbatifs comme les modes zéro. Or ces états, nous l’ avons vu, dominant l’ énergie de Casimir par leur contribution au déphasage δ_1 , et ne peuvent être négligés. De façon très générale et à cause du théorème de Levinson, ces modes zéro “forcent” la fonction $\delta(p)$ d’ être égale à 6π à l’ origine $p = 0$. Remarquons ici que la première correction quantique à la masse des solitons dans les théories en $1 + 1$ dimensions est donnée par une simple somme sur les états liés de l’ opérateur de fluctuation [55].

Le résultat (3.1) nous amène à émettre des doutes sur la validité de l’ approximation semi-classique pour le calcul de la masse du nucléon dans le modèle de Skyrme. Le rapport de la première correction quantique sur la masse classique (qui est égale à 1.23 GeV) est:

$$\left(\frac{\mathcal{M}_1}{N_c \mathcal{M}_0}\right)_{SK} = -1$$

Cette valeur nous fait penser que l'approximation semi-classique ne constitue pas un très bon cadre pour traiter le soliton du modèle de Skyrme car ce dernier est sujet à des effets quantiques très importants. Ces derniers ne peuvent pas vraiment être interprétés comme des “corrections” devant la masse classique. Le “skyrmion” est donc un soliton à couplage fort, ce qui n'est pas adapté à l'approche des Lagrangiens effectifs où l'on cherche à construire une approximation à couplage faible.

Nos espoirs pour la description semi-classique du nucléon ne sont pas vains moyennant quelques considérations phénoménologiques du même type que celles qui conduisent à généraliser le modèle de Skyrme en incluant les mésons de basse énergie. Pour étudier leurs effets, prenons pour simplifier le Lagrangien local \mathcal{L}_{2+4+6} qui correspond à la limite des grandes masses du modèle unifié proposé lors du chapitre I.

Calculant l'énergie de Casimir avec la solution classique de ce nouveau Lagrangien (les phases sont tracées sur la figure (2.1)) nous trouvons qu'elle diminue notablement: $(\mathcal{M}_1)_{2+4+6} = -0.795 + (-0.035) \text{ GeV}$ (3.2)

La contribution du contreterme est aussi diminuée par rapport au modèle de Skyrme. La masse classique, $N_c \mathcal{M}_0$ est plus grande (1.59 GeV) dans ce modèle et le rapport de la première correction quantique sur le terme dominant de la masse du nucléon est:

$$\left(\frac{\mathcal{M}_1}{N_c \mathcal{M}_0}\right)_{II} = -0.52$$

La diminution de l'énergie de Casimir du soliton dans le modèle \mathcal{L}_{2+4+6} peut être expliquée physiquement par une augmentation de la taille du soliton dans ce dernier par rapport au soliton du modèle de Skyrme. On pourrait à la limite “deviner” ce résultat simplement en observant la courbe des phases (figure (2.1)). Sur cette courbe il est clair que l'inclusion du terme d'ordre six a comme effet de réduire la région pour laquelle la phase est importante, et par conséquent l'effet Casimir sur la masse du soliton. Cet effet a été aussi observé dans

[56] dans une étude des effets quantiques vibrationnels à la masse. Le fait que les effets quantiques soient plus petits pour un objet ayant une extension spatiale plus importante n'est qu'une simple manifestation du principe d'incertitude de Heisenberg.

On trouve donc que contrairement au modèle de Skyrme, une simple généralisation à un Lagrangien effectif qui contient les effets des interactions du pion avec un méson ω infiniment massif (ou tout simplement l'inclusion d'un terme d'ordre supérieur dans le développement chirale) conduit à un secteur baryonique consistant avec le développement semi-classique. Le profil classique dans ce dernier modèle conduit à une hiérarchie bien définie parmi les différentes contributions à la masse du nucléon:

$$N_c \mathcal{M}_0 > \mathcal{M}_1 > \frac{1}{N_c} \mathcal{M}_2 \quad (3.3)$$

Le profil de la solution classique décroît plus vite en présence du terme d'ordre six, de sorte que l'on ait:

$$-\int d^3x \mathcal{L}_2 > -\int d^3x \mathcal{L}_4 > -\int d^3x \mathcal{L}_6 \quad (3.4)$$

ce qui justifie encore plus notre approximation qui consiste à négliger les contretermes d'ordre six, huit etc. dans le développement chirale.

Une dernière remarque concernant la constante de couplage axiale du nucléon g_A . La valeur de cette dernière est grande au niveau classique pour le modèle \mathcal{L}_{2+4+6} ($g_A = 1.37$). Même si nous n'avons pas calculé les contributions des boucles de pions à cette observable on peut penser, à cause des résultats qualitatifs de la réf. [53], que ces corrections vont dans la bonne direction. Il faut préciser ici qu'un calcul complet de ces corrections quantiques à g_A va probablement se compliquer par l'introduction des coordonnées collectives du nucléon.

4. Conclusions

Nous avons vu dans ce chapitre que le coefficient \mathcal{M}_1 constituant la première correction quantique à la masse du soliton-nucléon dépend fortement de la structure spécifique du Lagrangien effectif. En particulier, nous avons montré la nécessité d'inclure des termes d'ordre supérieur à quatre dans le développement chiral. Il est maintenant clair que le développement en \hbar/N_c a des chances de fournir une bonne description du secteur baryonique, seulement quand le modèle de Skyrme est généralisé de façon à inclure certains des effets du méson ω . Ces conclusions restent valables quand on envisage d'effectuer les calculs de l'énergie de Casimir avec l'opérateur Ω complet [57].

Il est intéressant de remarquer qu'on arrive qualitativement à la même conclusion qu'au chapitre I, où nous proposons un Lagrangien effectif pour la description unifiée des mésons et des baryons. Le fait que le développement semi-classique des observables baryoniques (équation (I.1)) est meilleur dans le modèle \mathcal{L}_{2+4+6} est en accord avec l'idée d'inclure dans le Lagrangien Effectif plus de degrés de liberté que ceux qui sont présents dans le modèle de Skyrme [58].

Le cadre théorique pour calculer systématiquement les corrections quantiques à la masse du nucléon dans le contexte de la théorie de perturbation chirale a été récemment proposé [59]. Connaissant le rôle important que jouent les mésons vecteurs ρ, ω et scalaires dans la physique de la diffusion $\pi\pi$ il serait très intéressant dans l'avenir d'aller plus loin et de calculer l'énergie de Casimir dans un modèle où les mésons scalaires et vecteurs sont explicitement présents. L'issue d'un tel calcul sera de la plus haute importance pour le développement semi-classique des observables baryoniques et de son utilité pratique.

Un aspect qui ne doit pas être négligé dans les futures études des fluctuations quantiques autour des solutions classiques des Lagrangiens effectifs est la détermination des contretermes d'ordre supérieur. Même si comme on a vu leur partie finie ne doit pas affecter beaucoup

la magnitude de la masse du nucléon, ils sont nécessaires pour éliminer la dépendance par rapport à l'échelle μ des observables physiques.

Pour ce qui est des ordres supérieurs à quatre dans le développement chiral, très peu d'auteurs ont entrepris une étude systématique pour justifier le choix des termes à y inclure. Ces études sont compliquées par le manque d'informations expérimentales sur les constantes qui figurent devant ces termes d'ordre supérieur. On peut éventuellement envisager d'introduire des contraintes pour spécifier la forme du Lagrangien effectif aux ordres chiraux élevés, comme il a été suggéré par quelques auteurs [60-61].

Terminons ce chapitre en faisant une dernière remarque sur les calculs de la résonance Roper du nucléon avec ces modèles de soliton topologique. D'après nos résultats il ne semble pas étonnant que le calcul de cette observable dans le cadre du modèle de Skyrme soit en désaccord avec la phénoménologie. Une première amélioration de la prédiction pour la masse de cette résonance peut-être envisagée après l'inclusion du terme d'ordre six.

Chapitre III

Sur la stabilité des solitons topologiques

Le nucléon étant une particule stable, cette stabilité doit être retrouvée dans les modèles où le nucléon est considéré comme un soliton topologique. Dans ce contexte, il faut donc s'assurer non seulement de l'existence de la solution de type soliton, mais aussi de la positivité du spectre des fluctuations autour de cette dernière.

Cette question de la stabilité a été d'abord posée par Skyrme dans son travail original. Il a remarqué que le modèle σ non-linéaire ne possède pas de solution non-triviale stable par rapport aux dilatations. Pour construire une solution de type soliton il a proposé d'ajouter à ce modèle un terme d'ordre quatre par rapport au gradient du champ unitaire U . Plus tard il a été proposé de stabiliser le modèle σ non-linéaire par des termes couplant le champ du pion au méson ρ , ce dernier étant considéré comme un champ de jauge chirale. La solution classique du système $\pi\rho$ trouvée dans ce contexte [62] est instable comme il a été montré plus tard [63]. Ce résultat mérite inspection car à la limite où le champ du ρ devient très lourd, le système $\pi\rho$ considéré dans ces travaux, tend vers le modèle de Skyrme qui bien sûr possède des solutions stables. L'instabilité du soliton quand le pion se couple au champ du ρ est d'autant plus étonnante, si on se rappelle que le système $\pi\omega$ [23], du point de vue de la stabilité, est parfaitement cohérent [32] avec sa limite locale.

1. Réalisations non-linéaires de la symétrie chirale

Dans ce chapitre nous allons étudier en détail le système $\pi\rho$ dans le but d'éclaircir ce problème d'instabilité, et de lever les ambiguïtés qui existent dans la littérature. L'accent sera mis sur les différentes manières possibles d'introduire le méson ρ dans les Lagrangiens phénoménologiques, quand la symétrie chirale est réalisée d'une façon non-linéaire [64]. La réalisation non-linéaire est définie en spécifiant l'action de l'élément G de $SU(2) \otimes SU(2)$ sur les éléments $u(\vec{\pi})$ de l'espace quotient $SU(2) \otimes SU(2)/SU(2)_V$:

$$u(\vec{\pi}) \xrightarrow{G} g_L u(\vec{\pi}) h^\dagger(\vec{\pi}) = h(\vec{\pi}) u(\vec{\pi}) g_R^\dagger \quad (1.1)$$

$u(\vec{\pi})$ étant la racine carrée du champ chirale: $u = U^{1/2} = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}/2}$. g_L et g_R sont des matrices de $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$ respectivement. Il est clair sur l'équation (1.1) que cette loi de transformation pour u est non-linéaire car la matrice de rotation h doit dépendre du champ du pion pour satisfaire à l'égalité (1.1). Avec cette définition le champ chirale U se transforme linéairement: $U \rightarrow g_L U g_R^\dagger$.

Deux représentations différentes pour le champ du méson ρ vont être considérées ici. L'une, conventionnelle [65], consiste à supposer que ce champ vecteur (\tilde{V}_μ) se transforme comme un boson de jauge du groupe "caché" $h(\pi)$:

$$\tilde{V}_\mu \rightarrow h(\pi) \tilde{V}_\mu h^\dagger(\pi) + \frac{i}{g} h(\pi) \partial_\mu h(\pi)^\dagger \quad (1.2)$$

Dans la section 2 nous allons revoir ce qui a été fait dans la littérature en ce qui concerne l'instabilité du soliton dans cette approche. La section 3 sera consacrée à l'étude détaillée de la stabilité du soliton dans le cas d'une transformation homogène pour les champs vecteurs:

$$V_\mu \rightarrow h(\pi) V_\mu h^\dagger(\pi) \quad (1.3)$$

2. Le soliton du système $\pi\rho$ dans une formulation "Yang-Mills"

Il n'est pas difficile de montrer que le Lagrangien minimal respectant la symétrie chirale dans la représentation définie par les lois (1.1) et (1.2), s'écrit comme:

$$\mathcal{L}_{\pi\rho}^{YM} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(\tilde{V}_{\mu\nu} \tilde{V}^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} M_\rho^2 \text{Tr}([\tilde{V}_\mu - \frac{i}{g} \Gamma_\mu]^2) + \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(u^\mu u_\mu) \quad (2.1)$$

avec $\tilde{V}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{V}_\nu - \partial_\nu \tilde{V}_\mu - ig[\tilde{V}_\mu, \tilde{V}_\nu]$, $\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger)$ et $u_\mu = i(u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger)$.

Le Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi\rho}^{YM}$ contient outre les termes quadratiques, des termes cubiques et quartiques par rapport aux champs vecteurs. Le couplage $\pi\rho$ dans le secteur des mésons est

en accord avec la notion de dominance vectorielle [65], et de façon générale ce Lagrangien décrit raisonnablement bien les interactions entre les mésons π et ρ .

Passons maintenant au secteur baryonique et remarquons qu' à la limite où la masse du méson ρ devient grande, le terme de Yang-Mills [66] $\tilde{V}_{\mu\nu}^2$ donne naissance à un terme de Skyrme dans le développement local. Par cette observation on pourrait penser que (2.1) possède des solutions classiques stables. Il n' en est rien. Pour le voir il faut d' abord écrire la masse du soliton en termes de profils sphériques en adoptant l' ansatz du hérisson pour le champ chirale et la configuration la plus générale pour les composantes spatiales du champ \tilde{V}_μ classique:

$$\tilde{V}_i = \tilde{v}_1(\tau_i - (\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i) + \tilde{v}_2(\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i + \tilde{v}_3(\vec{\tau} \times \hat{r})_i \quad (2.2)$$

Alors la masse statique du soliton, exprimée en termes des profils radiaux $F(r), \tilde{v}_i(r)$ ($i = 1, 2, 3$) se met sous la forme

$$\begin{aligned} M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \{ & \frac{f_\pi^2}{2} [\dot{F}^2 + 2\frac{\sin^2 F}{r^2}] + M_\rho^2 [2\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + 2(\tilde{v}_3 + \frac{1}{2gr}(1 - \cos F))^2] \\ & + 4(\frac{\tilde{v}_3}{r} + g(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_3^2))^2 + 2(\tilde{v}_3 + \frac{\tilde{v}_3}{r} + 2g\tilde{v}_1\tilde{v}_2)^2 + 2(\dot{\tilde{v}}_1 + \frac{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2}{r} - 2g\tilde{v}_2\tilde{v}_3)^2 \} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il existe des configurations spéciales pour lesquelles M possède des solutions classiques. Par exemple, les auteurs de la réf. [62] ont montré qu' il existe une solution non-triviale des équations du mouvement $F(r), \tilde{v}_3(r), \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = 0$ (avec $\tilde{v}_3 = \frac{-G(r)}{2r}$ pour retrouver leurs notations). Cependant, il a été ultérieurement montré par les auteurs de la réf. [63], que cette solution n' est pas stable car elle peut être rendue triviale ($F = \tilde{v}_3 = 0$) par une déformation continue des composantes \tilde{v}_1, \tilde{v}_3 . Cette déformation est possible à effectuer dans l' approche de Yang-Mills, car les composantes \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 se couplent à \tilde{v}_3 . Comme on peut voir sur l' équation (2.3) ces couplages déstabilisants ont lieu dans les termes cubiques et quartiques de la densité d' énergie de Yang-Mills. Ces instabilités se manifestent aussi dans le cas le plus général qui consiste à extrémiser la fonctionnelle (2.3) non seulement

par rapport aux fluctuations de F, \tilde{v}_3 mais aussi par rapport à celles de \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 . Ceci a été étudié dans [67] où il est trouvé que la seule solution est celle qui correspond au vide trivial $F = \tilde{v}_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), donnant ainsi $M = 0$. Il n'existe pas de solution stable dans le secteur non-trivial du Lagrangien (2.3).

Une autre propriété des solitons du Lagrangien (2.3) doit retenir notre attention ici. Supposons que l'on ajoute à $\mathcal{L}_{\pi\rho}^{YM}$ des termes stabilisateurs d'ordre quatre en dérivées du champ U . Dans ce cas, il existe des solutions classiques non-triviales pour les fonctions $F, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ [67], mais un nouveau problème apparaît: l'existence de deux solitons dégénérés dans le spectre classique. Ceci est dû à l'invariance de la masse classique du soliton par rapport à la transformation discrète des fonctions de profils :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &\rightarrow -\tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 &\rightarrow -\tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 &\rightarrow \tilde{v}_3\end{aligned}\tag{2.4}$$

Les solutions $(F, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ et $(F, -\tilde{v}_1, -\tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ forment un doublet de solitons. Une fois quantifié, ce doublet de solitons donnera naissance à deux états baryoniques quasi-dégénérés. Ceci n'est évidemment pas observé dans la Nature.

Quelques mots sur ce doublet de baryons. Les auteurs de [67] l'ont interprété comme un "doublet de parité". Pour notre part, nous nous gardons de l'appeler ainsi, car la transformation (2.4) n'a rien d'une opération de parité telle qu'elle est définie en théorie des perturbations [68]. Pour le voir il suffit d'écrire le champ du vecteur de façon à expliciter les indices de spin et d'isospin dans la configuration (2.2): $\tilde{V}_i = \tau_k \tilde{V}_{ki}$

$$\tilde{V}_{ki} = \tilde{v}_1(\delta_{ki} - \hat{r}_k \hat{r}_i) + \tilde{v}_2 \hat{r}_k \hat{r}_i - \tilde{v}_3 \epsilon_{kim} \hat{r}_m\tag{2.5}$$

Alors la transformation (2.4) pour les composantes du champ du ρ , s'exprime de la façon compacte:

$$\tilde{V}_{ki} \rightarrow -\tilde{V}_{ik}\tag{2.6}$$

Cette transformation n' a rien d' habituel, car il s' agit d' inverser le signe du champ et échanger les indices de spin et d' isospin. Cette symétrie ne peut exister que dans le secteur topologique du Lagrangien (2.1), où précisément les indices de spin et d' isospin des champs sont confondus à ceux de l' espace de configuration pour un hérisson. C' est la raison pour laquelle nous pensons qu' il ne faut pas interpréter cette transformation comme une transformation de parité.

Pour résumer donc, quand le méson ρ est supposé se transformer comme un boson de jauge du groupe caché h (équation (1.2)), le système $\pi\rho$ ne possède pas de solution classique stable en l' absence de termes d' ordre supérieur. En présence de termes stabilisateurs, il apparaît un doublet non-physique d' états baryoniques.

3. Transformation homogène des champs vecteurs

Comme nous pensons qu' il n' y a aucune raison viable de considérer que le méson ρ est un boson de jauge nous postulons une loi de transformation homogène dans ce qui suit:

$$V_\mu \rightarrow h(\pi)V_\mu h^\dagger(\pi) \quad (3.1)$$

h étant la matrice définie par l' équation (1.1). Puisque h est locale, les gradients doivent être généralisés pour se transformer eux aussi comme les champs V_μ . Pour cela il faut y ajouter un terme contenant la quantité Γ_μ définie dans la section précédente:

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu + [\Gamma_\mu, V_\nu]$$

Le Lagrangien du système $\pi\rho$, à l' ordre le plus bas par rapport aux champs vecteurs, et invariant par les transformations (1.1) et (3.1), est donné par:

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}\text{Tr}\left\{(V_{\mu\nu} + i\frac{g_V}{\sqrt{2}}[u_\mu, u_\nu])^2\right\} + \frac{M_\rho^2}{2}\text{Tr}(V_\mu V^\mu) + \frac{f_\pi^2}{4}\text{Tr}(u^\mu u_\mu) \quad (3.2)$$

où $V_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu$, g_V est la constante de couplage du pion au méson ρ . Comme il est montré dans l' Appendice A, le Lagrangien (3.2) est le plus simple conduisant à un Hamiltonien qui soit borné inférieurement. Ce Lagrangien est quadratique par rapport aux champs vecteurs.

Nous allons étudier la stabilité du secteur topologique dans le système $\pi\rho$, mais nous voulons aussi établir une analogie entre le mécanisme de stabilisation dans le système $\pi\rho$ et celui du système $\pi\omega$. En fait, on peut montrer que dans ce dernier modèle, la stabilité est due à une contrainte secondaire à laquelle le champ du ω obéit. Pour mieux illustrer le rôle joué par les contraintes dans le mécanisme de stabilisation du soliton pour le système $\pi\rho$, nous avons délibérément choisi de ne pas considérer dans ce qui va suivre la théorie (3.2), dans laquelle les champs contraints V_0 ne peuvent pas se coupler aux courants statiques du pion. Nous allons plutôt étudier une théorie avec des contraintes, équivalente à (3.2), l' équivalence étant comprise au sens des transformations canoniques et sera montrée dans l' Appendice A. Dans cette théorie le champ du ρ est défini en termes de champs tenseurs antisymétriques $W_{\mu\nu}$ se transformant comme $W_{\mu\nu} \rightarrow h(\pi)W_{\mu\nu}h^\dagger(\pi)$ par une rotation chirale, et la densité Lagrangienne est donnée par [43]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi\rho} = & -\frac{1}{2}\text{Tr}(\nabla^\mu W_{\mu\nu}\nabla_\sigma W^{\sigma\nu}) + \frac{M_\rho^2}{4}\text{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) \\ & + \frac{f_\pi^2}{4}\text{Tr}(u_\mu u^\mu) + i\frac{G_\rho}{2\sqrt{2}}\text{Tr}(W_{\mu\nu}[u^\mu, u^\nu]) \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec $W_{\mu\nu} = \tau_k W_{\mu\nu}^k$ k étant un indice d' isospin. La contribution de l' échange d' un ρ à la diffusion $\pi\pi$ avec les couplages du Lagrangien (3.3) a été systématiquement étudiée dans [69] et [70] pour le cas de trois saveurs. Il a été trouvé par les auteurs de [70] que cette contribution est identique à celle due au Lagrangien (2.1). L' équivalence des deux approches dans les ordres dominants de la diffusion $\pi\pi$ est mieux perçue à la limite des grandes masses pour le méson ρ . En effet, l' équation du mouvement du champ $W_{\mu\nu}$, à

cette limite, nous dit que $W_{\mu\nu} \rightarrow \frac{G_\rho}{i\sqrt{2}M_\rho^2}[u_\mu, u_\nu]$. En remplaçant cette dernière expression de $W_{\mu\nu}$ dans (3.3), on obtient:

$$\mathcal{L}_{\pi\rho}(M_\rho, G_\rho \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{f_\pi^2}{4}\text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{G_\rho^2}{8M_\rho^2}\text{Tr}([\partial_\mu U U^\dagger, \partial_\nu U U^\dagger]^2) \quad (3.4)$$

en utilisant la relation $u_\mu = iu^\dagger(\partial_\mu U U^\dagger)u$. Comme nous l' avons mentionné dans la section précédente, la limite locale du Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi\rho}^{YM}$ est aussi donnée par l' équation (3.4). La contribution du prochain terme (d' ordre six) du développement en puissances du champ du pion, à la composante temporelle du tenseur impulsion-energie, est négative, comme on peut le voir sur son expression:

$$\mathcal{L}_{\pi\rho}^{(6)} \approx \text{Tr}(\nabla^\mu[u_\mu, u_\nu]\nabla_\sigma[u^\sigma, u^\nu]) \quad (3.5)$$

En vertu de cette relation nous pouvons anticiper que l' energie de la solution classique de l' équation (3.3), si cette solution existe, sera inférieure à celle du Skyrmon de l' équation (3.4).

Représenter des champs vecteurs par des tenseurs antisymétriques suppose que l' on contraint les degrés de liberté redondants. Il est donc naturel de se consacrer en premier à la construction du Hamiltonien associé au Lagrangien (3.3), afin d' éliminer les champs obéissant à des contraintes.

a. Le Hamiltonien

Il n' est pas difficile de voir que les composantes spatiales du tenseur $W_{\mu\nu}$ ne sont pas des degrés de liberté physiques par construction. En effet, les moments canoniquement conjugués du champ $W_{\mu\nu}$ que l' on appellera $\pi_{\mu\nu}$ sont donnés par:

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\pi\rho}}{\partial[\partial_0 W_{\mu\nu}]} = -2\eta^{\mu 0}\nabla_\sigma W^{\sigma\nu} \quad (3.6)$$

η étant la métrique de l' espace-temps. Il est immédiat de déduire que $\pi_{ij} = 0$, et par conséquent les champs W_{ij} ne se propagent pas. Contrairement au cas des théories de Yang-Mills massives où les champs contraints \tilde{V}_0 se couplent à des dérivées temporelles disparaissant à la limite statique, ici les champs contraints W_{ij} se couplent au courants statiques du pion. Pour trouver la contrainte à laquelle les W_{ij} obéissent il faut calculer le Hamiltonien primaire. La terminologie “primaire” utilisée dans le formalisme de Dirac-Bergmann [71], sous-entend que cet Hamiltonien contient tous les champs, même ceux qui sont contraints. Il sera utile de paramétriser de la façon suivante le champ chiral:

$$U = \exp(i\vec{\tau}\hat{F}F) \quad (3.7)$$

Avec cette définition le Lagrangien du modèle σ non-linéaire s' écrit sous la forme compacte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma NL} &= \frac{f_\pi^2}{2} \partial_\mu \vec{F} \mathcal{G} \partial^\mu \vec{F} \\ \mathcal{G}_{ab} &= \hat{F}_a \hat{F}_b + \frac{\sin^2 F}{F^2} (\delta_{ab} - \hat{F}_a \hat{F}_b) \end{aligned} \quad (3.8)$$

L' isotenseur \mathcal{G} est en fait la “métrique” du groupe $SU(2)$ et son spectre est positif. Avec ces notations, Γ_μ et les gradients du pion u_μ sont donnés par:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= i \frac{\sin^2(F/2)}{F} \tau_a \epsilon_{abc} \hat{F}_b \partial_\mu F_c \\ u_\mu &= -\tau_a [\hat{F}_a \hat{F}_b + \frac{\sin F}{F} (\delta_{ab} - \hat{F}_a \hat{F}_b)] \partial_\mu F_b \end{aligned} \quad (3.9)$$

On a également besoin de l' expression du moment conjugué $\vec{\phi}$ du champ \vec{F} . Il est de la forme:

$$\vec{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\pi\rho}}{\partial[\partial_0 \vec{F}]} = f_\pi^2 \mathcal{G} \partial_0 \vec{F} + \frac{4G_\rho}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_i^\dagger \vec{W}_{0i} - \mathcal{M}_{0i}^\dagger \vec{\pi}_{0i} \quad (3.10)$$

avec la définition suivante des opérateurs d' isospin \mathcal{N}_i et \mathcal{M}_{0i} :

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}_i)_{ab} &= \epsilon_{pqa} \partial_i F_r \frac{\sin F}{F} \left[\left(1 - \frac{\sin F}{F}\right) (\hat{F}_p \hat{F}_b \delta_{qr} + \hat{F}_q \hat{F}_r \delta_{pb}) + \frac{\sin F}{F} \delta_{qr} \delta_{pb} \right] \\ (\mathcal{M}_{0i})_{ab} &= - \frac{2 \sin^2(F/2)}{F} [\delta_{ab} (\hat{F} \cdot \vec{W}_{0i}) - \hat{F}_a (W_{0i})_b] \end{aligned} \quad (3.11)$$

On élimine les dérivées temporelles des champs, en inversant les équations (3.6) et (3.10), ce qui permet d' écrire le Hamiltonien de la théorie en termes de variables canoniquement conjuguées: $H_P = \int d^3x (\vec{\pi}_{\mu\nu} \partial_0 \vec{W}^{\mu\nu} + \vec{\phi} \partial_0 \vec{F} - \mathcal{L}_{\pi\rho})$. Négligeant les termes de surface, on obtient après intégration par parties l' expression:

$$\begin{aligned} H_P = \int d^3x \left\{ \frac{\vec{\pi}_{0i}^2}{4} + \frac{1}{2f_\pi^2} \left[\vec{\phi} - \frac{4G_\rho}{\sqrt{2}} \vec{W}_{0i} \mathcal{N}_i + \vec{\pi}_{0i} \mathcal{M}_{0i} \right] \mathcal{G}^{-1} \left[\vec{\phi} - \frac{4G_\rho}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_i^\dagger \vec{W}_{0i} + \mathcal{M}_{0i}^\dagger \vec{\pi}_{0i} \right] \right. \\ \left. + \frac{f_\pi^2}{2} \partial_i \vec{F} \mathcal{G} \partial_i \vec{F} + \vec{A}_{i0i}^2 + M_\rho^2 \vec{W}_{0i}^2 \right. \\ \left. - \frac{M_\rho^2}{2} \vec{W}_{ij}^2 - \frac{iG_\rho}{\sqrt{2}} (W_{ij})_k [u_i, u_j]_k - \vec{\pi}_{0i} \vec{A}_{jji} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec les notations:

$$\begin{aligned} (A_{\alpha\beta\gamma})_k &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_k \nabla_\alpha W_{\beta\gamma}) \\ [u_i, u_j]_k &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tau_k [u_i, u_j]) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Définissons maintenant les crochets de Poisson fondamentaux, liant les champs canoniquement conjugués:

$$\left\{ W_{\mu\nu}^k(x), \pi_{\rho\sigma}^l(y) \right\}_{[x_0=y_0]} = \frac{1}{2} \delta^{kl} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.14)$$

où l' on a antisymétrisé les indices de spin dans l' expression habituelle, k et l sont des indices d' isospin. Remarquons que cette équation est incompatible avec la relation $\vec{\pi}_{ij} = 0$. Pour s' en sortir il suffit de traiter les variables $\vec{\pi}_{ij}$ de façon un peu particulière. Imposons

la conservation dans le temps de la contrainte primaire. Les variations des champs étant égales à leur crochets de Poisson avec le Hamiltonien, cette conservation est assurée par:

$$\{\pi_{ij}(x), H_P\} = 0 \quad (3.15)$$

En reportant l' expression de H_P (eq. (3.12)) dans ce crochet, et en utilisant les crochets fondamentaux définis plus haut, on arrive à l' équation de la contrainte secondaire après quelques intégrations par parties. Cette dernière peut-être écrite sous forme matricielle:

$$W_{ij} = \frac{1}{2M_\rho^2} \left\{ -i\sqrt{2}G_\rho[u_i, u_j] + \nabla_i \pi_{0j} - \nabla_j \pi_{0i} \right\} \quad (3.16)$$

Cette formule est l' équivalente de la loi de Gauss [72].

L' équation (3.16) est formellement analogue à celle obtenue par les auteurs de [32], pour le système $\pi\omega$:

$$\omega_0 = \frac{1}{m_\omega^2} (-\beta_\omega B_0 + \partial_i \Omega_i)$$

concernant la composante temporelle du champ du méson ω dans le modèle de la réf. [23].

Ω_i sont les moments conjugués des champs ω_i et B_0 est la densité de charge baryonique.

Nous sommes maintenant en position d' écrire le Hamiltonien physique (secondaire), en remplaçant W_{ij} (équation (3.16)) dans H_P . Nous obtenons:

$$\begin{aligned} H_S = \int d^3x \left\{ \frac{\vec{\pi}_{0i}^2}{4} + \frac{1}{2f_\pi^2} \left[\vec{\phi} - \frac{4G_\rho}{\sqrt{2}} \vec{W}_{0i} \mathcal{N}_i + \vec{\pi}_{0i} \mathcal{M}_{0i} \right] \mathcal{G}^{-1} \left[\vec{\phi} - \frac{4G_\rho}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_i^\dagger \vec{W}_{0i} + \mathcal{M}_{0i}^\dagger \vec{\pi}_{0i} \right] \right. \\ \left. + \frac{f_\pi^2}{2} \partial_i \vec{F} \mathcal{G} \partial_i \vec{F} + \vec{A}_{i0}^2 + M_\rho^2 \vec{W}_{0i}^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2M_\rho^2} \left[\frac{1}{2} (\nabla_i \pi_{0j} - \nabla_j \pi_{0i})_k - \frac{iG_\rho}{\sqrt{2}} [u_i, u_j]_k \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

En principe, il faut ajouter à cet Hamiltonien des multiplicateurs de Lagrange, pour s'assurer que les contraintes primaire et secondaire soient prises en compte dans la dynamique. Ici nous simplifions le problème, en posant ces multiplicateurs identiquement égaux à zéro, mais ceci n'altérera pas la généralité de nos conclusions.

Avant de passer à la construction des solutions statiques remarquons qu'en vertu de l'équation de la contrainte secondaire, toute tentative d'annuler le champ du ρ par une déformation continue va se heurter à la répulsion due au terme de Skyrme qui est explicitement présent dans le Hamiltonien secondaire. Ceci nous rappelle fortement le mécanisme de stabilisation du soliton dans le cas du système $\pi\omega$ [23], où la répulsion stabilisatrice provient d'un terme d'ordre six dans le développement chirale.

Nous allons maintenant chercher les solutions classiques de l'équation (3.17) dans le secteur de charge baryonique unité.

b. Solutions classiques

Considérons l'ansatz du hérisson, déjà rencontré au cours des chapitres précédents:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \hat{r}F, & W_{0i} &= f_\pi [w_1(\tau_i - (\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i) + w_2(\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i - w_3(\vec{\tau} \times \hat{r})_i] \\ \vec{\phi} &= \hat{r}\frac{f_\pi^2}{r}\phi, & \pi_{0i} &= \frac{f_\pi}{r} [\pi_1(\tau_i - (\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i) + \pi_2(\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i - \pi_3(\vec{\tau} \times \hat{r})_i]\end{aligned}\tag{3.18}$$

La forme (3.18) pour les champs vecteurs W_{0i} et π_{0i} est la configuration la plus générale, compatible avec la symétrie sphérique. Les profils $F, \phi, w_1, w_2, w_3, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ sont des fonctions de la variable radiale r (et du temps éventuellement, mais de toute façon cette dépendance n'est qu'implicite dans le formalisme Hamiltonien). Une fois les configurations (3.18) reportées dans le Hamiltonien (3.17), il est naturel de séparer ce dernier en deux parties, car les champs se découplent exactement:

$$H = 4\pi f_\pi^2 \int_0^\infty dr [\mathcal{H}_Q(F, \phi, w_1, w_2, w_3, \pi_1, \pi_2) + \mathcal{H}_{\pi\rho}(F, \pi_3)]\tag{3.19}$$

Le premier terme, \mathcal{H}_Q , est positif et quadratique dans les champs $\phi, w_1, w_2, w_3, \pi_1, \pi_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_Q = & \frac{1}{2}(\phi + 2g_\rho w_3 \sin F)^2 + \frac{\pi_2^2}{4} + \frac{\pi_1^2}{2} + (r\dot{w}_2 + 2w_2 - 2\cos F w_1)^2 \\ & + (M_\rho r)^2(w_2^2 + 2w_1^2 + 2w_3^2) + \frac{1}{2M_\rho^2}(\dot{\pi}_1 - \cos F \frac{\pi_2}{r})^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

g_ρ est la constante de couplage sans dimension, $g_\rho = 2\sqrt{2}G_\rho/f_\pi$.

Cet Hamiltonien est nul à la limite statique. Pour le prouver, considérons l'ensemble d'équations $\delta[\int_0^\infty dr \mathcal{H}_Q] = 0$ pour des champs statiques. Tout d'abord, celles concernant les champs ϕ et w_3 donnent identiquement $\phi = w_3 = 0$. Pour les autres champs il suffit de remplacer les variables w_1, w_2, π_1, π_2 par les variables p_1 et p_2 :

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{\cos F}{M_\rho^2 r^2} p_1, \quad w_2 = \frac{\dot{p}_1}{M_\rho^2 r} \\ \pi_1 = & \frac{\dot{p}_2}{M_\rho^2}, \quad \pi_2 = \frac{2\cos F}{M_\rho^2 r} p_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les équations de Hamilton se réduisent à:

$$\ddot{p}_i = (M_\rho^2 + \frac{2\cos^2 F}{r^2}) p_i \quad i = 1, 2 \quad (3.22)$$

En multipliant cette équation par p_i et en intégrant par parties le membre de gauche on arrive à l'expression:

$$\int_0^\infty dr [\dot{p}_i^2 + p_i^2 (M_\rho^2 + \frac{2\cos^2 F}{r^2})] = 0 \quad (3.23)$$

La seule solution est évidemment la solution triviale $p_i = \dot{p}_i = 0$, par conséquent $w_1 = w_2 = \pi_1 = \pi_2 = 0$ ce qui complète la démonstration. Pour des solutions de type soliton, nous avons donc montré que:

$$(\mathcal{H}_Q)_{statique} = 0 \quad (3.24)$$

Il est clair que la dégénérescence au niveau de la masse classique rencontrée dans la section 2, ne peut pas avoir lieu ici, les champs w_1, w_2, π_1, π_2 sont nuls de façon triviale. En plus, ils se découplent de la composante non-nulle à la limite statique π_3 .

En ce qui concerne la deuxième partie du Hamiltonien, nous trouvons l'expression suivante pour $\mathcal{H}_{\pi\rho}$:

$$\mathcal{H}_{\pi\rho} = \frac{1}{2}[(r\dot{F})^2 + 2\sin^2 F + \pi_3^2] + \frac{1}{2M_\rho^2} \left\{ (g_\rho \sin F \dot{F} - \dot{\pi}_3)^2 + 2\left(g_\rho \frac{\sin^2 F}{2r} - \cos F \frac{\pi_3}{r}\right)^2 \right\} \quad (3.25)$$

Cherchons maintenant des solutions ayant une charge topologique unité. Pour cela, il faut imposer des conditions aux limites $F(0) = \pi$ et $F(\infty) = 0$ et résoudre les deux équations de Hamilton, qui vont rendre $\mathcal{H}_{\pi\rho}$ stationnaire par rapport aux variations arbitraires des champs F and π_3 . Ces équations sont de la forme:

$$\dot{p} = \sin 2F + g_\rho \pi_3 \sin F + 2D \frac{\pi_3 \sin F}{M_\rho^2 r} \quad (3.26a)$$

$$\dot{C} = 2D \frac{\cos F}{r} - M_\rho^2 \pi_3 \quad (3.26b)$$

avec $C = g_\rho \sin F \dot{F} - \dot{\pi}_3$, $D = g_\rho \frac{\sin^2 F}{2r} - \cos F \frac{\pi_3}{r}$ et $p = r^2 \dot{F}$. Ces équations sont résolues numériquement (voir figure (3.1)).

On vérifie très aisément que la forme asymptotique de la solution des équations (3.26a-b) est compatible avec les conditions aux limites imposées au champ chiral. La solution asymptotique de (3.26b) pour le champ π_3 est de la forme $(Cte)e^{-M_\rho r}$. La valeur de g_ρ utilisée ($g_\rho = 2.1$) reproduit la largeur de désintégration $\rho \rightarrow \pi\pi$ au premier ordre des perturbations.

Il est intéressant d'observer que notre solution classique pour les champs F, π_3 est qualitativement semblable à celle obtenue par les auteurs de [62] pour les champs correspondants F, \tilde{v}_3 . La masse classique de la solution présente à la figure (3.1) est de 1.14 GeV,

légèrement inférieure à celle que l' on trouve dans le modèle de Skyrme correspondant ($e = \sqrt{2}M_\rho/f_\pi g_\rho$), comme nous l' avons prédit au début de cette section. Cette “attraction” provenant de l' interaction du champ chirale avec le méson ρ est aussi à l' origine de la compression légère que la solution subit par rapport au modèle de Skyrme. En effet, si l' on calcule le rayon isoscalaire du soliton

$$\langle r^2 \rangle_{I=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr (-\dot{F} \sin^2 F) \quad (3.27)$$

nous trouvons $\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2} = 0.35$ fm, contre 0.4 fm dans le modèle de Skyrme.

Nous avons aussi vérifié qu' il existe une solution des équations (3.26a-b) pour toute valeur de la constante de couplage g_ρ .

c. Stabilité

On va s' intéresser au signe de la seconde variation du Hamiltonien (3.19) par rapport aux petites fluctuations des champs autour de la solution classique. On considère des fluctuations monopolaires [73], correspondant à un mode de vibration scalaire:

$$\begin{aligned} F &= F_0(r) + \delta F(r, t), & \phi &= \phi_0(r) + \delta \phi(r, t) \\ \pi_i &= \pi_i^0(r) + \delta \pi_i(r, t), & w_i &= w_i^0(r) + \delta w_i(r, t) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considérons d' abord le terme \mathcal{H}_Q . En vertu des résultats analytiques vus plus haut, la partie statique des champs $\pi_1, \pi_2, w_1, w_2, w_3, \phi$ est nulle. Alors, leur contribution à la variation du Hamiltonien se découple des fluctuations de F , et on a la relation simple

$$\delta_{(2)} \mathcal{H}_Q(F, \phi, w_1, w_2, w_3, \pi_1, \pi_2) = \mathcal{H}_Q(F_0, \delta \phi, \delta w_1, \delta w_2, \delta w_3, \delta \pi_1, \delta \pi_2) \quad (3.29)$$

Nous avons montré analytiquement que \mathcal{H}_Q ne peut avoir qu' une contribution positive à la fluctuation de la masse. Il en résulte que les composantes π_1, π_2, w_1, w_2 ne déstabilisent pas le soliton.

Intéressons nous maintenant au terme $\mathcal{H}_{\pi\rho}$, pour déterminer si des fluctuations arbitraires des champs F et π_3 ne déstabilisent pas la solution classique. D'abord, effectuons un test préliminaire pour déterminer si cette solution est un minimum local par rapport à une classe de transformations d'échelle. Considérons à cette fin l'intégrale $I = \int_0^\infty dr [\mathcal{H}_{\pi\rho}(F, \pi_3)]$. Cette intégrale est égale à la masse du soliton à un facteur multiplicatif près, et elle peut s'exprimer comme une somme $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$ avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \pi_3^2 \\
I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr [(r\dot{F})^2 + 2 \sin^2 F] \\
I_3 &= \frac{1}{2M_\rho^2} \int_0^\infty dr [(g_\rho \sin F \dot{F})^2 + 2(g_\rho \frac{\sin^2 F}{r})^2] \\
I_4 &= -\frac{1}{2M_\rho^2} \int_0^\infty dr [2\dot{\pi}_3(g_\rho \sin F \dot{F}) + 4 \cos F \frac{\pi_3}{r} (g_\rho \frac{\sin^2 F}{r})] \\
I_5 &= \frac{1}{2M_\rho^2} \int_0^\infty dr [\dot{\pi}_3^2 + 2 \cos^2 F \frac{\pi_3^2}{r^2}]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Effectuons maintenant la transformation suivante de la solution classique:

$$F_0(r) \rightarrow F_0(\lambda r), \quad \pi_3^0(r) \rightarrow \gamma \pi_3^0(\lambda r) \tag{3.31}$$

λ et γ étant deux paramètres arbitraires. Par cette transformation d'échelle globale, I devient:

$$I_{\lambda\gamma} = \frac{1}{\lambda} (\gamma^2 I_1 + I_2) + \lambda (I_3 + \gamma I_4 + \gamma^2 I_5) \tag{3.32}$$

Développons cette expression autour de la solution classique ($\lambda = 1 + \epsilon_\lambda, \gamma = 1 + \epsilon_\gamma$) avec $\epsilon_\lambda, \epsilon_\gamma \ll 1$. Au premier ordre, la stationnarité de l'Hamiltonien fournit des relations entre les différentes contributions à la masse. On trouve

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= I_3 + I_4 + I_5 \\
2(I_1 + I_5) &= -I_4
\end{aligned} \tag{3.33}$$

relations que l' on vérifie avec la solution de la section précédente. Par ailleurs ceci constitue un excellent test de la méthode de résolution numérique. La variation quadratique maintenant peut se mettre sous la forme:

$$\delta_{(2)} I_{\lambda\gamma} = \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda & \epsilon_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(I_1 + I_2) & -4I_1 \\ -4I_1 & 2(I_1 + I_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\lambda \\ \epsilon_\gamma \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Parmi les valeurs propres de la matrice de cette forme quadratique une est positive. La positivité de la deuxième valeur propre est moins simple à établir. On peut formuler la condition nécessaire pour la stabilité de la solution classique, en d' autres termes le théorème de Derrick généralisé pour le système $\pi\rho$, par l' inégalité:

$$(I_1 + I_2)(I_1 + I_5) - 4I_1^2 > 0 \quad (3.35)$$

Nous n' avons malheureusement pas pu établir analytiquement que la solution de la section précédente satisfait à cette inégalité. Malgré tout le membre de gauche de (3.35) peut se calculer numériquement et en effet, nous avons trouvé qu' il est positif pour toute solution classique (en fait pour toute valeur de la constante g_ρ). Le soliton est donc un minimum local par rapport à la transformation (3.31).

Le fait que la solution soit un minimum local pour des transformations d' échelle, ne constitue pas une condition suffisante pour sa stabilité. Pour déterminer une telle condition, il faut considérer des fluctuations plus générales, de la forme $F = F_0 + \delta F(r, t)$ $\pi_3 = \pi_3^0 + \delta\pi_3(r, t)$.

La variation de l' Hamiltonien au second ordre par rapport à ces fluctuations est:

$$\delta\mathcal{H}_{\pi\rho} = 2\pi f_\pi^2 \int_0^\infty \psi^\dagger \mathcal{M} \psi dr \quad (3.36)$$

où ψ est un vecteur à deux composantes $\psi^\dagger = (\delta F \delta\pi_3)$ et \mathcal{M} est un opérateur hermitique, fonction de la variable r . Ses éléments de matrice sont:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(\delta F, \delta F)} &= -\frac{d}{dr}(r^2 + \frac{g_\rho^2}{M_\rho^2} \sin^2 F_0) \frac{d}{dr} + 2 \cos 2F_0 \\
&\quad - \frac{g_\rho^2}{M_\rho^2} \left[\sin 2F_0 \ddot{F}_0 + \cos 2F_0 \dot{F}_0^2 - \frac{\sin^2 F_0}{r^2} (3 - 4 \sin^2 F_0) \right] \\
&\quad + \frac{1}{M_\rho^2 r^2} \left[g_\rho \cos F_0 (\ddot{\pi}_3^0 r^2 + \pi_3^0 (9 \sin^2 F_0 - 2)) - 2(\pi_3^0)^2 \cos 2F_0 \right] \\
\mathcal{M}_{(\delta \pi_3, \delta \pi_3)} &= \frac{1}{M_\rho^2} \left[-\frac{d^2}{dr^2} + (M_\rho^2 + 2 \frac{\cos^2 F_0}{r^2}) \right] \\
\mathcal{M}_{(\delta F, \delta \pi_3)} &= \frac{1}{M_\rho^2} \left[g_\rho \sin F_0 \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} (-2 \sin 2F_0 \pi_3^0 + g_\rho (3 \sin^2 F_0 - 2) \sin F_0) \right] \\
\mathcal{M}_{(\delta \pi_3, \delta F)} &= (\mathcal{M}_{(\delta F, \delta \pi_3)})^\dagger
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Il est intéressant de noter que sur les deux premières lignes de cette équation, et parce que les termes en π_3^0 dans (3.37) aussi bien que le potentiel sont d'ordre $1/M_\rho^4$ ou plus, on retrouve l'opérateur de fluctuation du Skyrmion. Cet opérateur a un spectre positif comme il est montré dans la réf. [74].

Pour montrer finalement la stabilité il faut montrer que le spectre de \mathcal{M} se situe du côté des fréquences positives. C'est ce qui a été fait dans [72] en utilisant deux méthodes différentes. La première consiste à diagonaliser une approximation discrétisée de \mathcal{M} , dans laquelle nous n'avons trouvé que des valeurs propres positives et la deuxième consiste à résoudre les équations aux valeurs propres pour des énergies négatives, pour laquelle nous avons trouvé que le déterminant de Jost [75] associé à \mathcal{M} ne change pas de signe.

En définitive, nous avons montré que le méson ρ peut stabiliser le soliton d'une manière très similaire à celle que l'on rencontre quand on introduit le méson ω .

4. Conclusions

Il a été montré par les auteurs de la réf. [70], qu'avec le Lagrangien donné par l'équation (3.2) (ou (3.3)), les couplages effectifs induits dans le secteur des pions par l'échange d'

un ρ sont équivalents aux couplages produits par des Lagrangiens du même type que celui de l' équation (2.1). Cependant, nous avons noté une différence cruciale entre les secteurs baryoniques correspondants:

Quand la transformation du champ du méson ρ par une rotation chirale “cachée”, est supposée être homogène, les solitons topologiques du système $\pi\rho$ sont stables par rapport aux fluctuations des champs mésoniques, alors que dans les approches “non-minimales”, où le méson ρ est couplé au pion comme un boson de jauge de ce même groupe caché, le soliton est instable. De plus, dans la première approche il n' y a pas de doublet de baryons.

Il est donc clair que les ambiguïtés du système $\pi\rho$ existant dans la littérature précédant la référence [72] sont dûes au choix particulier de réalisation de la symétrie chirale par les champs vecteurs dans ces travaux.

Il n' est pas difficile en fait de montrer [70] qu' il existe une transformation non-linéaire entre les champs \tilde{V}_μ et V_μ , par le biais de laquelle on peut trouver une relation entre les Lagrangiens (2.1) et (3.2):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\mu &= V_\mu + \frac{i}{g} \Gamma_\mu, \quad g = \frac{1}{\sqrt{8}g_V} \\ \mathcal{L}_{\pi\rho}^{YM}(\tilde{V}_\mu) &= \mathcal{L}_V(V_\mu) + \frac{1}{32g_V^2} \text{Tr}([V_\mu, V_\nu]^2) + \frac{i}{\sqrt{32}g_V} \text{Tr}\{(V_{\mu\nu} + i\frac{g_V}{\sqrt{2}}[u_\mu, u_\nu])[V^\mu, V^\nu]\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nous pensons que c' est justement le dernier terme (proportionnel à $\frac{1}{g_V}$) dans le membre de droite de cette équation qui est responsable des instabilités dans le secteur baryonique du Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi\rho}^{YM}$.

D' un autre côté, et dans le secteur des mésons, ces termes cubiques et quartiques en champs vecteurs (équation (4.1)) contribuent à des processus mettant en jeu plusieurs mésons ρ (trois ou quatre), et du fait de la symétrie de jauge des relations ad-hoc existent entre ces processus. La question de savoir si ces couplages, et surtout si ces relations, sont réalistes du point de vue expérimental reste ouverte.

Il faut noter ici que les lois (1.2) et (1.3) ont la bonne propriété de former un groupe, et il est probable qu'elles soient les seules à la posséder [76]. Par exemple, la transformation inhomogène $\hat{V}_\mu \rightarrow h(\pi)\hat{V}_\mu h(\pi)^\dagger + \alpha\partial_\nu h(\pi)\hat{V}_\mu\partial^\nu h^\dagger(\pi)$ ne satisfait pas à l'associativité.

Finissons ce chapitre en disant qu'il sera intéressant de clarifier la structure topologique de la solution classique quand le Lagrangien contient non seulement le champ U mais aussi des champs axiaux etc.. On sait que la structure topologique de la solution joue un rôle non-trivial dans la stabilité des solitons pour les théories en $1 + 1$ dimensions [8],[9]. Mais la situation se complique beaucoup dans les théories à $3 + 1$ dimensions [77] et plus particulièrement pour les modèles où le champ chirale se couple à des mésons. On peut se poser la question de savoir si les propriétés topologiques non-triviales des champs de jauge [78] sont vraiment à l'origine de l'instabilité des solitons des Lagrangiens tels que (2.1).

Appendice A.

Dans cet appendice nous allons étudier une description des mésons vecteurs en termes de champs vecteurs V_μ , se transformant comme $V_\mu \rightarrow h(\pi)V_\mu h^\dagger(\pi)$ par une rotation chirale non-linéaire. Notre but est d'abord de montrer que le Lagrangien invariant chiral, qui satisfait aux conditions suivantes:

a) être d'ordre le plus bas en champs vecteurs

b) conduire à un Hamiltonien borné inférieurement

est donné par le Lagrangien de l'équation (3.2). L'équivalence formelle de la formulation en termes de vecteurs à celle en termes de tenseurs antisymétriques sera ensuite montrée.

Considérons d'abord un Lagrangien qui satisfait seulement à la condition a):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_V = & -\frac{1}{4}\text{Tr}(V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}) + \frac{M_\rho^2}{2}\text{Tr}(V_\mu V^\mu) \\ & + \frac{f_\pi^2}{4}\text{Tr}(u_\mu u^\mu) - i\frac{g_V}{2\sqrt{2}}\text{Tr}(V_{\mu\nu}[u^\mu, u^\nu]) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

avec $V_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu$. Ce Lagrangien a été étudié par les auteurs de la réf. [70] dans un autre contexte. Il n'est pas difficile de s'apercevoir que la limite locale (méson ρ très lourd) de ce Lagrangien, contient le terme à deux dérivées, un terme à six dérivées etc...: l'ordre quatre est absent de \mathcal{L}'_V . En fait, il a été montré dans [70] qu'il est nécessaire d'ajouter à \mathcal{L}'_V un terme local (en fait, le terme de Skyrme en $SU(2)$) pour que l'amplitude de diffusion $\pi\pi$ satisfasse à l'unitarité. Nous verrons qu'en demandant au Hamiltonien de satisfaire à la condition b), on peut arriver à la même conclusion que les auteurs de [70], à savoir qu'il faut ajouter un terme local d'ordre quatre à \mathcal{L}'_V .

Nous allons considérer le Hamiltonien associé au Lagrangien (A.1). Pour ceci faire, il faut d'abord calculer les moments conjugués $\bar{\pi}_\mu$ (la barre est pour éviter la confusion avec les

π_{0i} de la section 3) et $\vec{\phi}$ de V_μ et \vec{F} respectivement. Ceux du champ vecteur sont donnés par:

$$\bar{\pi}_\mu = - (2V_{0\mu} + i\sqrt{2}g_V[u_0, u_\mu]) \quad (A.2)$$

En vertu de la relation qui en résulte pour les composantes spatiales $\bar{\pi}_i$, le moment du champ chiral se met sous la forme:

$$\begin{aligned} \vec{\phi} &= \mathcal{A} \partial_0 \vec{F} + \mathcal{B}_i^\dagger \bar{\pi}_i \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}^\dagger = f_\pi^2 \mathcal{G} - \frac{1}{2} \left(\frac{4g_V}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_i^\dagger \right) \left(\frac{4g_V}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_i \right) \\ \mathcal{B}_i &= \frac{1}{2} \left[\frac{4g_V}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_i - 2\mathcal{M}_i \right] \end{aligned} \quad (A.3)$$

avec les matrices $\mathcal{G}, \mathcal{N}_i$ définies par les équations (3.8, 3.11). Pour avoir l'expression de \mathcal{M}_i il suffit de remplacer W_{0i} par V_i dans l'expression de la matrice \mathcal{M}_{0i} définie par les mêmes équations.

La contrainte primaire se lit sur l'équation (A.2): $\bar{\pi}_0 = 0$. Ce qui veut dire que V_0 n'est pas un degré de liberté de la théorie. Pour l'éliminer, il faut i) inverser les équations (A.2) et (A.3) pour obtenir le Hamiltonien primaire et ii) imposer la conservation dans le temps de la contrainte primaire en annulant son crochet de Poisson avec cet Hamiltonien. Ces opérations conduisent à la relation secondaire,

$$V_0 = \frac{1}{2M_\rho^2} \nabla_i \bar{\pi}_i \quad (A.4)$$

En utilisant cette relation, on arrive au Hamiltonien exprimé en termes de vrais degrés de liberté $\vec{F}, \vec{\phi}, \vec{V}_i, \bar{\pi}_i$:

$$\begin{aligned} H_S = \int d^3x \left\{ \frac{\bar{\pi}_i^2}{4} + \frac{1}{2} [\vec{\phi} - \bar{\pi}_i \mathcal{B}_i] \mathcal{A}^{-1} [\vec{\phi} - \mathcal{B}_i^\dagger \bar{\pi}_i] + \frac{f_\pi^2}{2} \partial_i \vec{F} \mathcal{G} \partial_i \vec{F} + \frac{(\nabla_i \bar{\pi}_i)_k^2}{4M_\rho^2} \right. \\ \left. + M_\rho^2 \vec{V}_i^2 + \frac{\vec{V}_{ij}^2}{2} + \frac{ig_V}{\sqrt{2}} (V_{ij})_k [u_i, u_j]_k \right\} \end{aligned} \quad (A.5)$$

Observons maintenant la partie dépendante de $\vec{\phi}$ de cet Hamiltonien. La contribution de ces termes n'est pas manifestement positive, car il n'est pas exclu que la matrice \mathcal{A} ait des valeurs propres négatives quand la constante de couplage g_V est non-nulle. Pour se rendre compte du problème, plaçons-nous dans la configuration du hérisson pour le champ du pion $\vec{F} = F(r)\hat{r}$. Il est alors immédiat d'inverser cette matrice:

$$\mathcal{A}_{ab}^{-1} = \frac{1}{f_\pi^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{4g_V^2}{f_\pi^2} \frac{2 \sin^2 F}{r^2}\right)} \hat{r}_a \hat{r}_b + \frac{F^2}{\sin^2 F} \frac{1}{\left(1 - \frac{4g_V^2}{f_\pi^2} \left[\frac{\sin^2 F}{r^2} + \dot{F}^2\right]\right)} (\delta_{ab} - \hat{r}_a \hat{r}_b) \right] \quad (\text{A.6})$$

Calculons maintenant la contribution à \mathcal{H}_Q due aux termes dépendant du moment du pion. Pour une configuration sphérique du champ vecteur:

$$\vec{\pi}_i = \frac{f_\pi}{r} [\bar{\pi}_1(\tau_i - (\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i) + \bar{\pi}_2(\vec{\tau} \cdot \hat{r})\hat{r}_i - \bar{\pi}_3(\vec{\tau} \times \hat{r})_i] \quad (\text{A.7})$$

nous arrivons, en vertu des équations (A.5), (A.6) et (A.7), à la forme suivante :

$$\mathcal{H}_Q = \frac{1}{2} \frac{(\phi + 2\sqrt{2}g_V\bar{\pi}_3 \sin F)^2}{1 - 8g_V^2 \sin^2 F / f_\pi^2 r^2} + \dots \quad (\text{A.8})$$

Cet Hamiltonien a un pôle, et n'est pas borné inférieurement si g_V et F sont non-nuls. Ceci n'est évidemment pas acceptable. Il est important de préciser ici, que même si nous avons fait usage d'un ansatz particulier pour compléter la démonstration, la conclusion sur la validité de la théorie (A.1) est générale. Notamment, nous n'avons pas vérifié si cette configuration satisfait aux équations du mouvement pour des valeurs de la fonction F différentes de zéro. Même si ce n'est pas le cas au niveau classique, ces configurations non-perturbatives déstabilisent la théorie quantique.

Nous avons anticipé sur l'origine de cette pathologie en observant que la matrice \mathcal{A} est susceptible d'acquérir une contribution négative du couplage pion- ρ . La façon la plus

simple de “régulariser” cette matrice, et par conséquent le Hamiltonien, est d’ajouter un terme local à \mathcal{L}'_V compensant cette contribution :

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{L}'_V + \frac{g_V^2}{8} \text{Tr}([u^\mu, u^\nu][u_\mu, u_\nu]) \quad (\text{A.9})$$

Ce terme n’est rien d’autre que le terme de Skyrme; le nouveau Hamiltonien est maintenant manifestement positif:

$$H = \int d^3x \left\{ \frac{\vec{\pi}_i^2}{4} + \frac{1}{2f_\pi^2} [\vec{\phi} - \vec{\pi}_i \mathcal{B}_i] \mathcal{G}^{-1} [\vec{\phi} - \mathcal{B}_i^\dagger \vec{\pi}_i] + \frac{f_\pi^2}{2} \partial_i \vec{F} \mathcal{G} \partial_i \vec{F} + \frac{(\nabla_i \vec{\pi}_i)_k^2}{4M_\rho^2} \right. \\ \left. + M_\rho^2 \vec{V}_i^2 + \frac{1}{2} [(\vec{V}_{ij})_k + \frac{ig_V}{\sqrt{2}} [u_i, u_j]_k]^2 \right\} \quad (\text{A.10})$$

Nous concluons donc que le Lagrangien satisfaisant aux conditions a) et b) énoncées au début de cet appendice est donné par l’expression (3.2). Remarquons que le seul fait d’imposer au Hamiltonien d’être positif, détermine la valeur minimale de la constante de Skyrme: $e = (2g_V)^{-1}$.

Il n’est pas difficile de montrer maintenant que le Hamiltonien (A.10) est exactement égal au Hamiltonien en termes de tenseurs antisymétriques (3.17):

$$H[\vec{F}, \vec{\phi}, V_i, \vec{\pi}_i] = H_S[\vec{F}, \vec{\phi}, W_{0i}, \pi_{0i}] .$$

Il existe une transformation canonique entre les deux ensembles de champs $\{\vec{F}, \vec{\phi}, V_i, \vec{\pi}_i\}$ et $\{\vec{F}, \vec{\phi}, W_{0i}, \pi_{0i}\}$ en effectuant le remplacement $g_V \rightarrow G_\rho/M_\rho$:

$$V_i \rightarrow -\frac{\pi_{0i}}{2M_\rho} \\ \vec{\pi}_i \rightarrow 2M_\rho W_{0i} \quad (\text{A.11})$$

Nous avons montré l’équivalence de la formulation en termes de vecteurs (3.2) et de celle en termes de tenseurs antisymétriques (3.3). Il est donc évident que les conclusions faites sur la stabilité des solutions classiques du Lagrangien (3.3) s’appliquent sans aucune ambiguïté et telles quelles au cas des solitons topologiques du Lagrangien (3.2).

Conclusions Générales

Dans cette revue nous nous sommes concentré à la description des nucléons en tant que solitons topologiques d' une théorie effective de mésons. Le but de cette étude est de construire une théorie unifiée des mésons et des baryons, comme il a été suggéré en [21]. Cette théorie est sensée modéliser la Chromodynamique Quantique (QCD) dans son régime non-perturbatif, aux échelles des distances des baryons (1 fm). Dans notre approche, basée en partie sur une vieille idée de Skyrme [2], les mésons sont considérés comme des champs élémentaires et les baryons comme leurs excitations de type soliton topologique. Les interactions (fortes) entre les mésons sont décrites par un Lagrangien effectif qui doit respecter les propriétés de la théorie sous jacente, la QCD. Ce Lagrangien doit ainsi respecter la symétrie chirale, la brisure de l' invariance d' échelle de la QCD etc. Mais ces propriétés générales ne sont pas assez contraignantes pour déterminer la forme spécifique du Lagrangien effectif. Ce degré d' arbitraire dans la détermination du Lagrangien effectif peut être réduit si l' on tient compte de la phénoménologie bien connue du secteur des mésons. C' est ce qui a été proposé dans la réf. [24]. Notre travail a consisté d' abord à étudier une extension du modèle de la réf. [24] dans le but d' y inclure des degrés de liberté scalaires. Ceci nous a conduit dans le chapitre I à introduire les champs vecteurs comme des champs de jauge non-abéliens dans le modèle σ linéaire [30]. Cette formulation nous amène naturellement à un Lagrangien effectif contenant les mésons les plus légers ($\pi, \rho, \omega, A_1, \epsilon$). Les paramètres du modèle sont déterminés en ajustant les observables du secteur mésonique. Nous construisons alors les solutions de type soliton dans le secteur à charge baryonique unité, et nous étudions les propriétés statiques des baryons. Un autre test important et sévère pour le modèle considéré est fourni par les propriétés de l' interaction entre les baryons. Nous avons étudié les interactions statiques entre ces solitons. En projetant ces interactions sur les différents

canaux de spin et isospin [30] nous avons obtenu les composantes centrale, spin-spin et tenseur de l'interaction nucléon-nucléon.

Les résultats montrent que même dans le cas où l'approximation du produit est adoptée pour le système à deux solitons, des attractives ayant la bonne portée apparaissent dans le canal central de l'interaction NN . Ceci est à opposer à tous les calculs précédents effectués à partir du modèle de Skyrme, qui n'aboutissent qu'à des forces répulsives, ou attractives mais à longue portée. Nous pensons à cet égard que la présence simultanée des degrés de liberté mésoniques du pion, et des résonances de basse énergie est d'une importance cruciale.

Ensuite nous avons effectué une analyse semi-classique du modèle de Skyrme, en évaluant la première correction quantique à la masse du soliton [47]. Dans le chapitre II, nous avons montré que cette correction est très grande (elle est du même ordre de grandeur que la masse classique) dans le cas du modèle de Skyrme original. Nos résultats suggèrent que ce modèle ne peut pas être considéré comme une théorie effective réaliste. Nous avons ensuite montré que la situation est nettement améliorée si l'on envisage d'inclure dans le Lagrangien effectif des termes d'ordre supérieur, par exemple un terme d'ordre six dans les dérivées du champ du pion. Ces résultats fournissent des motivations théoriques très fortes pour généraliser le modèle de Skyrme afin de modéliser QCD à grand N_c .

Un autre problème qui requiert attention est celui de la stabilité des solitons, car les nucléons sont stables par l'interaction forte. Dans le chapitre III nous avons étudié le rôle joué par les mésons vecteurs dans la stabilité des solitons topologiques, dans le cadre du système $\pi\rho$. Aujourd'hui on sait que l'introduction du méson ρ comme un champ de Yang-Mills massif se couplant au pion, déstabilise le soliton, et que la symétrie de jauge est à l'origine de l'existence d'un doublet quasi-dégénéré dans le spectre baryonique. Ces ambiguïtés n'existent pas dans le cas du méson ω . Nous avons montré qu'elles peuvent disparaître aussi dans le cas du méson ρ , si ce dernier est supposé se transformer d'une

façon homogène par une rotation du groupe chirale non-linéaire [72]. Ainsi les mésons ρ et ω jouent un rôle similaire dans le mécanisme de stabilisation du soliton. Ceci est satisfaisant parce qu' à la limite où ces mésons deviennent très lourds (limite locale) la contribution du méson ρ tend vers le terme de Skyrme (ordre quatre) et celle du ω tend vers un terme d' ordre six. Ces deux termes à leur tour stabilisent le soliton séparément.

Un certain nombre de questions en rapport avec les études présentées ici restent ouvertes:

D' abord, l' extraction du potentiel nucléon-nucléon dans le modèle que nous avons proposé pour la description unifiée des mésons et des baryons, peut être faite par des méthodes numériques de minimisation exacte dans le secteur à deux solitons. Le résultat d' un tel calcul pourrait nous donner une indication quasi-définitive sur la validité de ce modèle pour la description d' un grand éventail de phénomènes de la physique des hadrons.

Les observables des baryons dans les théories effectives précédentes s' expriment comme un développement en puissances de \hbar/N_c . Il est important de savoir si ce développement est perturbatif et convergent. L' étude exposée dans le chapitre II apporte les premiers éléments de réponse à cette question. Il est donc naturel maintenant non seulement de calculer les premières corrections quantiques à d' autres observables telle la constante de couplage axiale du nucléon, mais aussi et surtout d' évaluer ces corrections pour les modèles plus réalistes où le champ chirale se couple à des champs vecteurs, scalaires etc... .

Notre étude sur la stabilité des solitons montre le vrai rôle que le méson ρ joue dans les interactions fortes en stabilisant le nucléon-soliton topologique. Cette étude ouvre un débat sur les différentes façons de réaliser la symétrie chirale par les mésons ρ et A_1 . Dans cette optique, nous avons récemment proposé un lagrangien minimal $\pi\rho A_1$ [79] généralisant ainsi notre théorie du chapitre III au cas où le méson vecteur-axial est aussi présent.

Remerciements

L' auteur aimerait remercier le Professeur Robert Vinh Mau pour son soutien vigoureux et pour avoir dirigé une partie de ses travaux. Les membres de la Division de Physique Théorique de l' Institut de Physique Nucléaire à Orsay sont remerciés pour leur accueil durant la période 1990/93. Cet article de revue a été complété grâce au soutien financier du *Engineering and Physical Sciences Research Council*, Angleterre.

Références

- [1] K. G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445; J. Kogut et L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 395; A. M. Polyakov, Phys. Lett. B59 (1975) 85
- [2] E. Witten, Nucl. Phys. B160 (1979) 57
- [3] T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A260 (1961) 127
- [4] J. S. Russel, Proc. of the British Association for the Advancement of Science (1845) 311
- [5] D. J. Korteweg et G. de Vries, Phil. Mag. 39 (1895) 422
- [6] N. J. Zabusky et M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240
- [7] C. Rogers et W. F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Academic Press 1982
- [8] J. Rubinstein, J. Math. Phys. 11 (1970) 258
- [9] D. Finkelstein et C. Misner, Ann. of Phys. (N.Y.) 6 (1959) 230; D. Finkelstein, J. Math. Phys. 7 (1966) 1218
- [10] R. Rajamaran, Phys. Rep. 21 (1975) 227
- [11] R. Dashen, B. Hasslacher et A. Neveu, Phys. Rev. D10 (1975) 4114; *ibid* D10 (1975) 4130; *ibid* D10 (1975) 4138; J. Goldstone et R. Jackiw, Phys. Rev. D11 (1975) 1486
- [12] S. Coleman, Phys. Rev. D11 (1975) 2088
- [13] G. t' Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461; B75 (1974) 461
- [14] E. Witten, Nucl. Phys. B223 (1983) 422; *ibid.* (1983) 433
- [15] J. Goldstone et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 986

- [16] G. H. Derrick, J. Math. Phys. Vol.5 No9 (1964) 1252
- [17] G.S. Adkins, C.R. Nappi et E. Witten, Nucl. Phys. B228 (1983) 552
- [18] R. Vinh Mau, M.Lacombe, B.Loiseau, W.N. Cottingham et P. Lisboa, Phys. Lett. B150 (1985) 259
- [19] A. Jackson, A.D. Jackson et V. Pasquier, Nucl. Phys. A432 (1985) 567
- [20] T.S. Walhout et J. Wambach Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 314
- [21] E. Witten, dans *Solitons in Nuclear and elementary Particle Physics*, eds. A. Chodos, E. Hadjimichael et C. Tze (World Scientific, Singapore,1984)
- [22] K. Iketani, Kyushu Univ. preprint, 84-HE-2 (1984)
- [23] G. Adkins et C. Nappi, Phys. Lett. B137 (1984) 552
- [24] M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau et W.N. Cottingham, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 170; Phys. Rev. D38 (1988) 1491
- [25] M. Chemtob, Nucl. Phys. A 466 (1987) 509
M. Mashaal, T. N. Pham et T. N. Truong, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 436;
Phys. Rev. D34 (1986) 3484
- [26] M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau et W.N. Cottingham, Phys. Rev. D40 (1989) 3012
- [27] M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau et W.N. Cottingham, Phys. Lett. B161 (1985) 31; M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau et W.N. Cottingham, Phys. Lett. B169 (1985) 121
- [28] J. Schechter, Phys. Rev. D34 (1986) 868
- [29] H. Yabu, B. Schwesinger et G. Holzwarth, Phys. Lett. B224 (1989) 25

- [30] D. Kalafatis et R. Vinh Mau, Phys. Lett. B283 (1992) 13; Phys. Rev. D46 (1992) 3903
- [31] S. L. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426; J. S. Bell et R. Jackiw, Nuovo Cim. 60 (1969) 147; W. A. Bardeen, Phys. Rev. 184 (1969) 1848
- [32] H. Forkel, A.D. Jackson et C. Weiss, Nucl. Phys. A526 (1991) 453
- [33] O. Kaymakcalan, S. Rajeev et J. Schechter, Phys. Rev. D30 (1984) 594; H. Gomm, O. Kaymakcalan et J. Schechter, *ibid* 30 (1984) 2345
- [34] B. Schwesinger, H. Weigel, G.Holzwarth et A.Hayashi, Phys. Rep. 173 (1989) 173
- [35] O. Dumbrajs et al., Nucl. Phys. B216 (1983) 277
- [36] A. Hosaka, M. Oka et R. Amado, Nucl. Phys. A530 (1991) 507
- [37] M. Lacombe et al, Phys. Rev. C21 (1980) 861
- [38] R. Vinh Mau dans *Mesons in Nuclei*, eds M. Rho et D. Wilkinson (North Holland, Amsterdam, 1979)
- [39] V. Thorsson et I. Zahed, Phys. Rev. D45 (1992) 965.
- [40] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap., ser. B, 51 (1948) 793
- [41] R. P. Feynman et A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, eds. McGraw-Hill (1965)
- [42] C. Itzykson et J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, eds. McGraw-Hill (1980), Chap. 9
- [43] J. Gasser et H. Leutwyler, Ann. Phys. (N.Y.) 158 (1984) 142
- [44] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Eds. Cambridge University Press (1985)
- [45] M. Abramowitz et I. Stegun, *Hanbook of Mathematical Functions*, Eds. Dover (1964)

- [46] J. Schwinger, Phys. Rev. 94 (1951) 1362
- [47] B. Moussallam et D. Kalafatis, Phys. Lett. B272 (1991) 196
- [48] P. Wilkey, *Index Theorems and the Heat Equation*, Eds. Publish or Perish, Berkeley (1975)
- [49] P. Ramond, *Field Theory: A modern Primer*, Eds. Addison-Wesley Reading (1981)
- [50] C. Rikkenbach, J. Gasser, J. F. Donoghue et B. R. Holstein, Phys. Rev. D43 (1991) 127
- [51] H. Walliser et G. Eckart, Nucl. Phys. A429 (1984) 251; M. P. Mattis et M. Karliner, Phys. Rev. D31 (1985) 2833
- [52] S. C. Generalis et G. Williams, Nucl. Phys. A484 (1988) 620
- [53] I. Zahed, A. Wirzba et U.-G. Meissner, Phys. Rev. D33 (1986) 830
- [54] A. Dobado et J. Terron, Phys. Lett. B247 (1990) 581
- [55] K. Cahill, A. Comtet et R. J. Glauber, Phys. Lett. B64 (1976) 283
- [56] M. Chemtob, Nucl. Phys. A473 (1987) 613
- [57] B. Moussallam, Orsay prépublication IPNO/TH 92-94, paru dans "Baryons as Skyrme Solitons", World Scientific eds. (1993)
- [58] D. Kalafatis, contribution à "QCD Vacuum Structure", p. 241, eds World Scientific (1993)
- [59] B. Moussallam, Annals of Physics (N. Y.) 225 (1993) 264
- [60] C. Bernard et R. Kerner, Lett. Math. Phys. 18 (1989) 193
- [61] L. Marleau, Phys. Rev. D43 (1991) 885

- [62] Y. Igarashi, M. Johmura, A. Kobayashi, H. Otsu, T. Sato et S. Sawada, Nucl. Phys. B259 (1985) 721
- [63] Z. F. Ezawa et T. Yanagida, Phys. Rev. D33 (1986) 247; J. Kunz et D. Masak, Phys. Lett. B179 (1986) 146
- [64] S. Coleman, J. Wess et B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2239 ; C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess et B. Zumino, *ibid* p. 2247; S. Weinberg, Phys. Rev. 166 (1968) 1568
- [65] M. Bando, T. Kugo et K. Yamawaki, Phys. Rep. 164 (1988) 217
- [66] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191
- [67] A. Kobayashi, H. Otsu, T. Sato et S. Sawada, Nagoya Univ. preprint, DPNU 91-50, IPC-91-04 ; K. Yang, S. Sawada et A. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. 87 (1992) 457
- [68] J. D. Bjorken et S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, Mc-Graw Hill 1965
- [69] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich et E. de Rafael, Nucl. Phys. B321 (1989) 311
- [70] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich et E. de Rafael , Phys. Lett. B223 (1989) 425
- [71] K. Sundermayer, *Constrained Dynamics* dans *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag 1982
- [72] A. Abada, D. Kalafatis et B. Moussallam, Phys. Lett. B300 (1993) 256
- [73] Y. Brihaye, C. Semay et J. Kunz, Phys. Rev. D44 (1991) 250
- [74] I. Zahed, U. G. Meissner et U. B. Kaulfuss, Nucl. Phys. A426 (1984) 525
- [75] R. G. Newton, *Scattering theory of waves and particles*, Springer-Verlag eds., p. 346
- [76] R. Kerner; communication privée

- [77] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. Vol 24 (1976) 449
- [78] M. Chaichian et N. F. Nelipa, *Introduction to Gauge Field Theories*, Springer-Verlag Ed., p. 296
- [79] D. Kalafatis, Phys. Lett. B313 (1993) 115; D. Kalafatis et Michael C. Birse , prépublication Université de Manchester MC/TH 94/10.

Sommaire

| | |
|--|-------|
| <i>Abstract</i> | p. 2 |
| Introduction | p. 3 |
| I. Un modèle des interactions fortes à basses énergies | p. 8 |
| 1. <i>Les solitons du modèle de Skyrme</i> | p. 10 |
| 2. <i>Généralisations du modèle de Skyrme</i> | p. 14 |
| 3. <i>Un modèle unifiant les mésons et les baryons</i> | p. 16 |
| 4. <i>Le secteur des mésons</i> | p. 23 |
| 5. <i>Le secteur baryonique</i> | p. 26 |
| 6. <i>L'interaction nucléon-nucléon</i> | p. 28 |
| 7. <i>Discussion des résultats</i> | p. 36 |
| <i>Appendice A</i> | p. 42 |
| <i>Appendice B</i> | p. 43 |
| <i>Appendice C</i> | p. 44 |
| II. Sur le développement semi-classique de la masse du soliton | p. 46 |
| 1. <i>L' énergie de Casimir du soliton</i> | p. 47 |
| 2. <i>Calcul des déphasages. Traitement des divergences ultraviolettes</i> | p. 52 |
| 3. <i>Résultats</i> | p. 56 |
| 4. <i>Conclusion</i> | p. 61 |
| III. Sur la stabilité des solitons topologiques | p. 63 |
| 1. <i>Réalisations non-linéaires de la symétrie chirale</i> | p. 64 |
| 2. <i>Le soliton du système $\pi\rho$ dans une formulation "Yang-Mills"</i> | p. 65 |
| 3. <i>Transformation homogène des champs vecteurs</i> | p. 68 |

| | |
|------------------------------|-------|
| a. le Hamiltonien | p. 70 |
| b. Solutions classiques | p. 74 |
| c. Stabilité | p. 77 |
| 4. <i>Conclusions</i> | p. 80 |
| <i>Appendice A</i> | p. 83 |
| Conclusions Générales | p. 87 |
| Remerciements | p. 90 |
| Références | p. 91 |
| Figures | p. 97 |

This figure "fig1-1.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig2-1.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig3-1.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig4-1.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig1-2.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig2-2.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig3-2.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig1-3.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>

This figure "fig3-3.png" is available in "png" format from:

<http://arXiv.org/ps/hep-ph/9406410v1>